

Exercice 1

Soit $u_n = \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n - \frac{b}{1+n}$; nature de $\sum u_n$ et $\sum (-1)^n u_n$ en fonction de a et b .

Exercice 2 (CCINP PSI 2023)

Soit $u_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$, pour $n \geq 1$

1. Montrer que u_n existe et tend vers 0
2. On pose $v_n = \frac{(-1)^n}{n} u_n$. Montrer que $\sum v_n$ converge
3. On pose $w_n = \frac{(-1)^n}{n} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$. Quelle est la nature de $\sum w_n$?
4. On pose $x_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$. Quelle est la nature de $\sum x_n$?

Exercice 3 (Mines-Télécom PSI 2023)

Soient $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs telle que $\sum \rho_n$ diverge et $S_n = \sum_{k=0}^n \rho_k$.

1. Montrer que $\sum \frac{\rho_n}{S_n}$ diverge. (*)
2. Montrer que $\sum \frac{\rho_n}{S_n^2}$ converge. (*)

Exercice 4 (IMT PSI 2019)

Justifier la convergence de $\int_0^{+\infty} \left(1 - t \arctan \frac{1}{t}\right) dt$ puis la calculer.

Exercice 5 (Mines-Ponts PSI 2021)

Pour $x > 0$, on pose $f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$

1. Montrer que f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et donner la valeur de $f'(x)$.
2. Donner des équivalents de f en 0 et $+\infty$. (*)
3. Montrer que f est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et calculer $\int_0^{+\infty} f(t) dt$. (*)

Exercice 6 (Mines-Ponts PSI 2023)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et T -périodique. Montrer qu'il existe un unique réel λ pour lequel l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{f(t) - \lambda}{t} dt$ est convergente

1. dans le cas où $f = \sin$
2. dans le cas général. (*)

Indications**Exercice 3**

1. Comparer avec $\sum (\ln(S_n) - \ln(S_{n-1}))$ et discuter selon que $\lim \frac{\rho_n}{S_n} = 0$ ou non.
2. Introduire la suite $\left(\frac{1}{S_n}\right)$

Exercice 5

2. En 0, examiner $f(x) - \int_x^1 \frac{dt}{t}$ et en $+\infty$, commencer par une IPP.
3. Pour le calcul, IPP à nouveau

Exercice 6

2. Introduire une primitive F de f .