Corrigé TD2 : réduction des endomorphismes

Exercice 7 **(CCINP PSI 2022)**

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A & 0 \end{pmatrix}$

1. Déterminer le rang de B en fonction du rang de A.
2. Déterminer $\mathcal{X}_B$ en fonction de $\mathcal{X}_A$ *(*)*. Que peut-on en déduire sur les valeurs propres de A et B ?
3. Montrer que si A est inversible et admet n valeurs propres distinctes alors B est diagonalisable.
4. B est-elle diagonalisable si A n'est plus supposée inversible ?
5. Si B est diagonalisable, montrer que A l'est aussi.
6. Si A est diagonalisable, montrer que B est diagonalisable si et seulement si A est inversible.

---

1. $\mathrm{rg}(B) \overset{C_1 \leftrightarrow C_2}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} = n + \mathrm{rg}(A)$

2. Si $\lambda \neq 0$, $\mathcal{X}_B(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda I_n & -I_n \\ -A & \lambda I_n \end{vmatrix} \overset{L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1}{\lambda} L_2}{=} \begin{vmatrix} \lambda I_n - \dfrac{1}{\lambda} A & 0 \\ -A & \lambda I_n \end{vmatrix} = \det\left(\lambda I_n - \dfrac{1}{\lambda} A\right) \det(\lambda I_n) = \det\left[\left(\lambda I_n - \dfrac{1}{\lambda} A\right)(\lambda I_n)\right]$ donc $\mathcal{X}_B(\lambda) = \det(\lambda^2 I_n - A) = \mathcal{X}_A(\lambda^2)$. Les deux polynômes $\mathcal{X}_B(X)$ et $\mathcal{X}_A(X^2)$ sont égaux sur $\mathbb{C}^*$ donc en une infinité de valeurs donc sont égaux. Ainsi $\boxed{\mathcal{X}_B(X) = \mathcal{X}_A(X^2)}$ donc $\lambda \in \mathrm{Sp}(B)$ si et seulement si $\lambda^2 \in \mathrm{Sp}(A)$.

3. Si $\mathcal{X}_A = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i)$ avec $\lambda_i \neq 0$ (car A inversible donc $0 \notin \mathrm{Sp}(A)$), il existe $\mu_i \in \mathbb{C}$ tel que $\mu_i^2 = \lambda_i$ donc $\mathcal{X}_B = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} (X^2 - \lambda_i) = \prod_{i=1}^{n} (X - \mu_i)(X + \mu_i)$ est SARS car comme $\lambda_i \neq 0$, on a $\mu_i \neq -\mu_i$ et $\boxed{B \text{ est DZ}}$

4. Si $n = 1$ et $A = 0$, on a $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ puis $\mathcal{X}_B = X^2$ et $\mathrm{rg}(B) = 1$ donc $\dim(E_0(B)) = 1 \neq m_0(B)$ donc B n'est plus DZ. *c'est seulement un contre exemple mais ce sera précisé dans le cas général à la dernière question.*

5. $B^2 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ puis $P(B^2) = \begin{pmatrix} P(A) & 0 \\ 0 & P(A) \end{pmatrix}$. Comme B est DZ, B^2 aussi donc il existe P SARS tel que $P(B^2) = 0$ donc tel que $P(A) = 0$; A admet un polynôme annulateur SARS donc $\boxed{A \text{ est DZ}}$

6. Si A est DZ et inversible alors il existe $P = \displaystyle\prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)$ est SARS et annule A si $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sont les valeurs propres distinctes de A. Comme A est inversible, on a $\lambda_i \neq 0$ et on peut à nouveau poser $\lambda_i = \mu_i^2$ avec $\mu_i \neq -\mu_i$. On a donc $P(B^2) = 0$ (donc B^2 est DZ). Le polynôme $Q(X) = P(X^2)$ est donc annulteur de B. Or $Q(X) = \displaystyle\prod_{i=1}^{r} (X^2 - \lambda_i) = \prod_{i=1}^{r} (X - \mu_i)(X + \mu_i)$ reste SARS (comme dans **3**) donc B est DZ.
   Réciproquement, on a déjà vu que si B est DZ alors A est DZ. Si on suppose que A n'est pas inversible alors $0 \in \mathrm{Sp}(A)$ et $m_0(A) \overset{\mathrm{DZ}}{=} \dim(E_0(A)) = n - \mathrm{rg}(A)$. De même $0 \in \mathrm{Sp}(B)$ et $m_0(B) \overset{\mathrm{DZ}}{=} \dim(E_0(B)) = 2n - \mathrm{rg}(B)$. Comme $\mathcal{X}_B(X) = \mathcal{X}_A(X^2)$, on a $m_0(B) = 2m_0(A)$ (écrire $\mathcal{X}_A$ sous forme factorisée). On aurait donc $2n - \mathrm{rg}(B) = 2(n - \mathrm{rg}(A))$ puis $\mathrm{rg}(B) = 2\,\mathrm{rg}(A)$ ce qui est absurde avec la première question car comme A n'est pas inversible, on a $\mathrm{rg}(A) \leqslant n - 1$.

Exercice 8 **(Mines-Ponts PSI 2024)**

Soit A une matrice carrée d'ordre n, montrer l'équivalence entre les deux propositions

i) A est nilpotente
ii) $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(A^2) = \cdots = \mathrm{Tr}(A^n) = 0$ *(*)*

On introduit les valeurs propres (complexes) distinctes de A : $\mathcal{X}_A = \displaystyle\prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{n_i}$ avec $n_i \in \mathbb{N}^*$. Puis on trigonalise A (toujours dans $\mathbb{C}$) : $A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{n_1} & & (*) \\ 0 & \ddots & \\ (0) & & \lambda_r I_{n_r} \end{pmatrix} P^{-1}$. On a alors $A^k = P \begin{pmatrix} \lambda_1^k I_{n_1} & & (?) \\ 0 & \ddots & \\ (0) & & \lambda_r^k I_{n_r} \end{pmatrix} P^{-1}$ ce qui permet de calculer $\mathrm{Tr}(A^k) = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} n_i \lambda_i^k$. On peut maintenant examiner l'équivalence demandée :

1. Si A est nilpotente alors il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k = 0$ donc X^k annule A et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \{0\}$ donc, comme $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \neq \emptyset$, on a $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{0\}$ (avec $n_0 = n$ forcément) donc $\mathrm{Tr}(A^k) = n_0 0^k = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

2. Si réciproquement $\mathrm{Tr}(A^k) = 0$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a $\displaystyle\sum_{i=1}^{r} n_i \lambda_i^k = 0$. L'idée est de voir ces égalités comme un système linéaire. On ne conserve que les r premières lignes pour avoir un système carré (ie $k \in [\![1, r]\!]$, ce qui est possible car $r \leqslant n$) et on introduit la matrice de Vandermonde $A = (\lambda_j^{i-1})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Si on introduit également le vecteur colonne $X = \begin{pmatrix} n_1\lambda_1 \\ \vdots \\ n_r\lambda_r \end{pmatrix}$, on peut réécrire le système de r équations précédent sous la forme $AX = 0$. Comme les λ_i sont deux à deux distincts, la matrice A est inversible donc l'unique solution de $AX = 0$ est $X = 0$. Mais comme $n_i \geqslant 1$, la seule solution pour que $X = 0$ est d'avoir $r = 1$ (une seule valeur propre) et $\lambda_1 = 0$. On a donc $\mathcal{X}_A = X^n$ et le théorème de Cayley-Hamilton donne alors $A^n = 0$ donc $\boxed{A \text{ est nilpotente}}$