

Oral TD4 : suites et séries de fonctions

Exercice 1 (CCINP PSI 2023)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ par $f_n(x) = \sin(nxe^{nx^2})$.

1. Montrer que $(f_n)_{n \geq 1}$ converge simplement vers une fonction F à déterminer.
2. Montrer que $(f_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément sur tout segment $[a, 1]$ avec $a \in]0, 1[$.
3. En considérant $f_n\left(\frac{1}{n}\right)$, que dire de la convergence uniforme de $(f_n)_{n \geq 1}$ sur $[0, 1]$?

Exercice 2 (CCINP PSI 2023)

Soient $\alpha > 0$ et $f_\alpha : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \sin^\alpha t \cos^n t$.

1. Étudier la convergence simple de la série.
2. Pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, donner une expression simple de $f_\alpha(t)$ et étudier la convergence uniforme de la série. (*)
3. Pour quelles valeurs de α , l'intégrale $\int_0^{\pi/2} f_\alpha(t) dt$ converge-t-elle?
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n(\alpha) = \int_0^{\pi/2} \sin^\alpha t \cos^n t dt$.
 - a) Pour quelles valeurs de α , la série $\sum u_n(\alpha)$ converge-t-elle?
 - b) Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(3)$.

Exercice 3 (Mines-Ponts PSI 2022)

On donne $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n^2 x^2}$.

1. Domaine de définition et continuité de f .
2. Donner la limite ℓ de $f(x)$ quand $x \rightarrow +\infty$ puis un équivalent de $f(x) - \ell$. (*)
3. Donner un équivalent de $f(x)$ quand $x \rightarrow 0^+$.

Exercice 4 (CCINP PSI 2023)

Soit $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n^2}$

1. Donner le domaine de définition D de f .
2. Montrer que f est dérivable sur D .
3. Déterminer un équivalent de f en 1 ; on pourra faire une comparaison série/intégrale et utiliser $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 5 (CCINP PSI 2023)

Soit $a_n = \int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n dt$.

1. Montrer que (a_n) converge
2. Étudier la série $\sum (-1)^n a_n$
3. On considère la série $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence R et soit f sa somme.
 - a) Montrer que $a_n \geq \frac{1}{n+1}$. (*)
 - b) En déduire la valeur de R .
 - c) Montrer que a_n vérifie la relation suivante : $\forall n \in \mathbb{N}, (2n+3)a_{n+1} = (n+1)a_n + 1$.
 - d) Montrer que f vérifie une équation différentielle d'ordre 1 à déterminer.

Indications

Exercice 2

2. Attention au cas particulier $t = 0$.

Exercice 3

2. Conjecturer l'équivalent en cherchant un équivalent des sommes partielles.

Exercice 5

- 3.a) Remarquer que $1+t^2 \geq 2t$.
- 3.b) IPP.