Solution.

1)Je ne fais pas le dessin, mais c'est obligatoire pour vous.
Référentiel terrestre supposé galiléen.
Système 1 : particule M_1
Forces appliquées : le poids $\vec{P}_1 = -mg\vec{e}_z$
la force de liaison sans frottement sur le plan $\vec{N}_1 = N_1\vec{e}_z$ opposée au poids.
la tension du fil : $\vec{T}_1 = -T\vec{e}_r$ avec $T \geq 0$
Le PFD donne : $m\vec{a}_1 = \vec{P}_1 + \vec{N}_1 + \vec{T}_1$
En projection sur la verticale, on obtient N_1=mg.
Sur les deux axes des polaires , cela donne :

$$(1a) \quad m\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) = -T \qquad et \qquad (1b) \quad m\left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right) = \frac{m}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right) = 0$$

On obtient donc $r^2\dot{\theta} = C$, qui est une constante d'intégration, donc obtenue par les conditions initiales. On peut aussi obtenir cette relation en utilisant le TMC à M_1. C est la constante des aires.

Système 2 : particule M_2
Forces appliquées : le poids $\vec{P}_2 = -\lambda mg\vec{e}_z$
la tension du fil : $\vec{T}_2 = T\vec{e}_z$ avec $T \geq 0$
Le PFD donne : $\lambda m\vec{a}_2 = \lambda m\ddot{z}\vec{e}_z = \vec{P}_2 + \vec{T}_2 \qquad soit \quad (2) \quad \lambda m\ddot{z} = -\lambda mg + T$

2)Si le fil est tendu , alors T>0 et $r - z = L$, ce qui donne $\dot{r} = \dot{z}\ \ et\ \ \ddot{r} = \ddot{z}$.
L'élimination de T entre les deux PFD, et l'utilisation de la constante des aires C permettent alors d'obtenir l'équation différentielle vérifiée par r(t) :

$$(\lambda + 1)\ddot{r} - \frac{C^2}{r^3} = -\lambda g$$

Si le fil est détendu, alors T=0 , $r - z < L$, et les deux mouvements se simplifient si on reprend le PFD: mouvement uniforme à vitesse constante pour M_1, et chute libre verticale pour M_2.

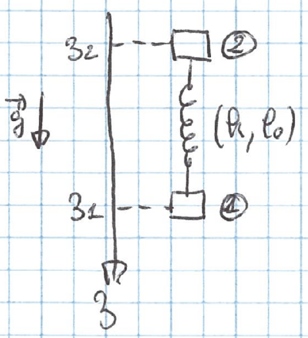
3)On veut une trajectoire circulaire pour M_1 donc M_2 ne bouge pas. la relation 2 donne alors :

$$T = \lambda mg$$

On reporte alors dans (1a) avec $\ddot{r} = 0$: $\quad r_o\dot{\theta}^2 = \lambda g \quad$ soit une vitesse angulaire constante qui vaut donc $\frac{v_o}{r_o}$, sa valeur initiale. Cela donne finalement :

$$v_o = \sqrt{\lambda g r_o}$$

mcp 02



à $t=0$ $\begin{cases} z_1 = z_{10} & z_2 = z_{20} \\ \dot{z}_1 = 0 & \dot{z}_2 = 0 \end{cases}$

PFD à ① projeté sur Oz : $\boxed{m\ddot{z}_1 = mg - k(z_1 - z_2 - \ell_0)}$ (1)

——— ② ————————— : $\boxed{m\ddot{z}_2 = mg + k(z_1 - z_2 - \ell_0)}$ (2)

EQUILIBRE INITIAL $t<0$. ON PEUT UTILISER (2) avec $\ddot{z}_2 = 0$.

$\hookrightarrow \boxed{z_{10} - z_{20} = \ell_0 - \frac{mg}{k}}$

ACCELERATIONS INITIALES $t=0^+$

ON A CONTINUITÉ DE LA POSITION $\Rightarrow \ddot{z}_1(t=0^+) = 2g \quad \ddot{z}_2(t=0^+) = 0$

RESOLUTION DU MVT (SYSTEME À DEUX CORPS D'UN POINT DE VUE FORMEL)

(1) + (2) $\quad \ddot{z}_1 + \ddot{z}_2 = 2g \Rightarrow \dot{z}_1 + \dot{z}_2 = 2gt + \cancel{cte} \Rightarrow z_1 + z_2 = gt^2 + cte2$

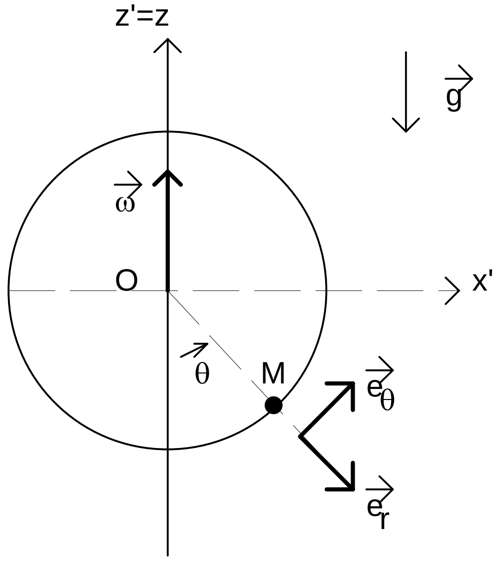
CI $\qquad$ $z_{10} + z_{20}$ CI

(1) − (2) $\quad (\ddot{z_1 - z_2}) + \omega_0^2(z_1 - z_2 - \ell_0) = 0$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$

$\hookrightarrow (z_1 - z_2) = \ell_0 + A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$

CI $\qquad -\frac{mg}{k} = A \qquad B = 0$

ΠΣΙ2.mcp03.



J'ai remplacé Ω par ω et j'impose pour les calculs θ entre 0 et π/2, ce qui ne limite pas la généralité du problème.

On suppose le référentiel terrestre galiléen, et la masse M constitue le système physique.

<u>Mouvement de M dans le référentiel terrestre:</u>

On suppose que la masse M est immobile par rapport au cercle tournant. Dans ce cas, sa trajectoire dans le référentiel terrestre galiléen est un cercle d'axe Oz et de rayon R'=Rsin(θ) parcouru à vitesse uniforme $v = R'\omega$. Dans ce cas, l'accélération est centripète, dirigée vers le centre du cercle et de norme $\frac{v^2}{R'}$. On peut donc écrire :

$$\vec{a}(M) = -\frac{v^2}{R'}\vec{e}_{x'} = -R\omega^2 sin(\theta)\vec{e}_{x'}$$

<u>Forces appliquées au système :</u>

Le poids de la particule $\vec{P} = m\vec{g}$

La force de liaison de la particule sur le cercle $\vec{T}$. En supposant l'absence de frottement, sa puissance est nulle et elle est perpandiculaire au vecteur $\vec{e}_\theta$.

Le PFD donne : $m\vec{a}(M) = -m\,\frac{v^2}{R'}\vec{e}_{x'} = -mR\omega^2 sin(\theta)\vec{e}_{x'} = \vec{P} + \vec{T}$

Pour éliminer la force de liaison inconnue, on projète sur $\vec{e}_\theta$:

$$-mR\omega^2 sin(\theta)\vec{e}_{x'}\cdot\vec{e}_\theta = m\vec{g}\cdot\vec{e}_\theta + 0$$

avec : $\vec{e}_{x'}\cdot\vec{e}_\theta = cos(\theta)$ et $\vec{g}\cdot\vec{e}_\theta = g.cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -gsin(\theta)$

Soit finalement :

$$R\omega^2 sin(\theta)cos(\theta) = gsin(\theta)$$

Donc : {sin(θ)=0 soit θ=0 ou π solutions évidentes} ou { $os(\theta) = \frac{g}{R\omega^2}$ dans le cas où $g \leq R\omega^2$ }

A vitesse faible ≤ $\sqrt{\frac{g}{R}}$, 2 solutions 0 (stable) et π (instable).

A vitesse élevée $\omega \geq \sqrt{\frac{g}{R}}$, 4 solutions dans l'intervalle]-π +π] :

$$-arccos\left(\frac{g}{R\omega^2}\right) stable\ ;\ 0\ instable\ ;\ +arccos\left(\frac{g}{R\omega^2}\right)\ stable\ ;\ \pi\ instable$$

D'un point de vue physique, j'ajoute maintenant la solution non prise en compte jusqu'ici.

La question de la stabilité de l'équilibre ne vous semble peut-être pas claire. Alors , vous devez réfléchir un peu : une des positions d'équilibre ci-dessus est forcément instable, et vous devez savoir qu'une position d'équibre stable (minimum d'énergie potentielle) est forcément entre deux instables (maximum d'énergie potentielle) et réciproquement.

mcp 04

① cf cours sur trajectoire circulaire gravitation

$\hookrightarrow \quad E_p = -\dfrac{G M_{terre} \cdot m}{R} = -2E_c = -mv^2 \Rightarrow E_m = E_c + E_p$

$$\boxed{E_m = -\dfrac{G m M_{terre}}{2R}}$$

AVEC $R = R_{Terre} + h \simeq 7160$ km.

LA TROISIÈME LOI DE KEPLER $\dfrac{R^3}{T^2} = \dfrac{G M_{terre}}{4\pi^2} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\dfrac{R^3}{G M_{terre}}} \simeq 3000$ s.

② ⓐ ON VA UTILISER LE TEC SOUS LA FORME :

VARIATION D'ÉNERGIE MÉCANIQUE = TRAVAIL DES FORCES NON CONSERVATIVES

$$-\dfrac{G m M_{terre}}{2} \underbrace{\Delta\left(\dfrac{1}{R}\right)}_{\simeq -\frac{\Delta R}{R^2}} \simeq \text{FORCE} \times \text{DÉPLACEMENT}$$

$$-\alpha m v^2 \times \underbrace{2\pi R}_{\text{PÉRIMÈTRE}}$$

POUR UN TOUR COMPLET. $\Delta R = -1$ m.

$\hookrightarrow$ AVEC $v^2 = \dfrac{G M_{terre}}{R}$, ON DOIT $\alpha = -\dfrac{\Delta R}{4\pi R^2}$

$$\simeq 1{,}55\ 10^{-15}\ m^{-1}$$

ⓑ ON VA FAIRE UNE HYPOTHÈSE SIMPLE : LE RAYON DE LA TRAJECTOIRE VA PEU VARIER AU COURS DES 10 ANS, DONC LE SATELLITE VA CONTINUER À PERDRE 1 m PAR RÉVOLUTION.

$\Rightarrow$ EN 10 ANS, ENVIRON 105 000 TOURS.

$\hookrightarrow$ LE RAYON BAISSE DE 105 km, À COMPARER AU RAYON INITIAL (7160 km) ET NON À LA HAUTEUR (800 km)

OK, NON ?

SINON $\dfrac{dE_m}{dt} = \vec{f} \cdot \vec{v} = -\alpha m v^3$ avec $\dfrac{dE_m}{dt} = -\dfrac{G M_{terre} m}{2} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{R}\right)$

$\Rightarrow \dfrac{\dot{R}}{\sqrt{R}} = -2\alpha\sqrt{G M_{terre}} \Rightarrow R(t) = \left(\sqrt{R(t=0)} - 2\alpha\sqrt{G M_{terre}}\, t\right)^2$

$= R(t=0)\left[1 - 2\alpha\, v(t=0)\, t\right]^2$ ~~$\simeq 104{,}6$ km~~

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{BAISSE DE } 104{,}6 \text{ km}}$

mcp05.

(a) Le système est à l'équilibre pour $x_1 = l_0$ et $x_2 = 2l_0$. On va donc prendre ces positions comme références :

$$\begin{cases} M_1 \text{ repérée par } X_1 = x_1 - l_0 \\ M_2 \text{ repérée par } X_2 = x_2 - 2l_0 \end{cases}$$

RFD aux deux particules $\Rightarrow$ $\begin{cases} m\ddot{X}_1 = -kX_1 + k(X_2 - X_1) \\ m\ddot{X}_2 = -k(X_2 - X_1) \end{cases}$

qui devient : (EQ) $\boxed{\begin{cases} \ddot{X}_1 = -2\omega_0^2 X_1 + \omega_0^2 X_2 \\ \ddot{X}_2 = -\omega_0^2 (X_2 - X_1) \end{cases}}$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

(b)

Pour rechercher le régime libre, on passe en notation complexe, et on cherche $\underline{X}_1 = \underline{X}_{10}\, e^{j\omega t}$ $\underline{X}_2 = \underline{X}_{20}\, e^{j\omega t}$.

On obtient $\begin{cases} (2\omega_0^2 - \omega^2)\underline{X}_{10} - \omega_0^2 \underline{X}_{20} = 0 \\ -\omega_0^2 \underline{X}_{10} + (\omega_0^2 - \omega^2)\underline{X}_{20} = 0. \end{cases}$

Pour avoir une solution non nulle, il faut $\Delta = 0$.

Soit $\boxed{\omega^4 - 3\omega_0^2\omega^2 + \omega_0^4 = 0}$

dont les deux solutions sont $\boxed{\omega_1 = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}\,\omega_0}$ et $\boxed{\omega_2 = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}\,\omega_0}$ (EQ1)

(c) 2 MODES PROPRES

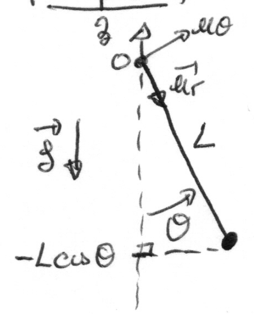
Supposons qu'on soit ds le mode propre (1), alors $\ddot{X}_1 = -\omega_1^2 X_1$
$\ddot{X}_2 = -\omega_1^2 X_2$

(EQ) à $\boxed{t=0}$ devient : $\begin{cases} -\omega_1^2 b_1 = -2\omega_0^2 b_1 + \omega_0^2 b_2 \\ -\omega_1^2 b_2 = -\omega_0^2 (b_2 - b_1) \end{cases}$

Avec (EQ1), on obtient $\boxed{\frac{b_2}{b_1} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}}$

Ds le mode 1, les 2 masses vibrent en PHASE. Développez la m̃ méthode pour le mode 2 $\Rightarrow$ opposition de phase.

$\boxed{\text{mcp06}}$



$$\begin{cases} \text{vitesse } \vec{v} = L\dot{\theta}\,\vec{u_\theta} \\ \text{Energie potentielle de pesanteur } E_p = mgz = -mgL\cos\theta \end{cases}$$

Quand on néglige les frottements, la seule force qui travaille est le poids, qui est une force conservative.

↳ Th. de l'Energie mécanique $E_m = cte = \frac{1}{2}mv^2 + E_p$.

Au sommet de l'oscillation $\theta = \theta_0$ $\vec{v} = 0$ $\Rightarrow$ $E_m = -mgL\cos\theta_0$.

↳ $\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{L}(\cos\theta - \cos\theta_0)$ $\Rightarrow$ $\boxed{\left(\frac{d\theta}{dt}\right) = \pm\sqrt{\frac{2g}{L}}\cdot\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}$ (α)

On prend un quart d'oscillation : $t : t_0 \longrightarrow t_0 + \frac{T}{4}$

$\theta : 0 \xrightarrow[\dot{\theta} > 0.]{} \theta_0$

$$(\alpha) \Rightarrow \int_{t_0}^{t_0+\frac{T}{4}} \sqrt{\frac{2g}{L}}\cdot dt = \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}$$

$$\hookrightarrow \quad T = 4\sqrt{\frac{L}{2g}}\int_0^{\theta_0}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}} = 2\sqrt{\frac{L}{g}}\int_0^{\theta_0}\frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}}$$

__Défaut__ : cette intégrale n'est pas calculable. On a une singularité en $\theta = \theta_0$

__D'où__ chgt de variable nécessaire $k = \sin\frac{\theta_0}{2}$ $\quad k\sin u = \sin\frac{\theta}{2}$

$u : 0 \longrightarrow \frac{\pi}{2}$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{T = 4\sqrt{\frac{L}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{du}{\sqrt{1 - k^2\sin^2 u}}}$$

INTEGRALE CALCULABLE NUMERIQUEMENT

Pour les petits angles, à l'ordre 2 en θ_0, $k = \frac{\theta_0}{2}$

$$T = 4\sqrt{\frac{L}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{du}{\sqrt{1 - \frac{\theta_0^2}{4}\sin^2 u}} \xrightarrow[\text{en } \theta_0]{\text{ordre 2}} 4\sqrt{\frac{L}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1 + \frac{\theta_0^2}{8}\sin^2 u\right)du$$

$$T = 4\sqrt{\frac{L}{g}}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\theta_0^2}{8}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right) = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left(1 + \frac{\theta_0^2}{16}\right)$$

FORMULE DE BORDA ...

1)h en kg.m^2.s^{-1} ou Js.

2)La quantité de mouvement d'un système isolé se conserve.

On a donc :$\vec{p}_f = \vec{p}_i + \frac{h}{\lambda}\vec{u}$

3)Avec les explications de l'énoncés, le nombre de chocs pendant δt est δt/τ est la quantité de mouvement augmente donc de $\delta\vec{p} = \left(\frac{\delta t}{\tau}\right)\frac{h}{\lambda}\vec{u}$

4)La variation de quantité de mouvement correspond à une force.

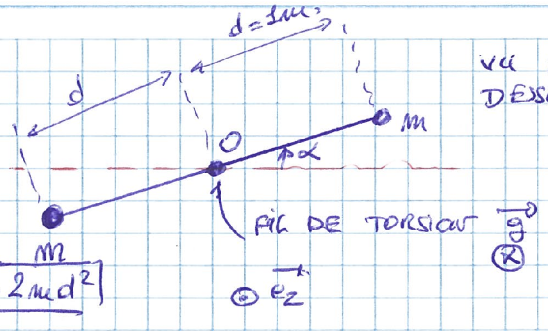
On en déduit donc : $\vec{F} = \left(\frac{\delta\vec{p}}{\delta t}\right) = \frac{h}{\lambda\tau}\vec{u}$

5)On a donc une accélération moyenne de $a = \frac{h}{\lambda\tau m}$ dont la valeur numérique est de 11500 SI soit environ 1150g. Valeur très grande devant les accélérations communes.

mcp 10

COUPLE DE TORSION

REF : TERRESTRE GALILÉEN
SYSTÈME : TIGE DE LONGUEUR $2d = 2m$, AVEC LES DEUX MASSES



VU DU DESSUS

↳ MOMENT D'INERTIE / AXE Oz $\boxed{J = 2md^2}$

EN NÉGLIGEANT CELUI DE LA TIGE

BILAN MÉCANIQUE : POIDS en O, FORCE DE LIAISON PASSANT PAR O, COUPLE DE TORSION $\vec{\Gamma}' = -C\alpha\,\vec{e_z}$

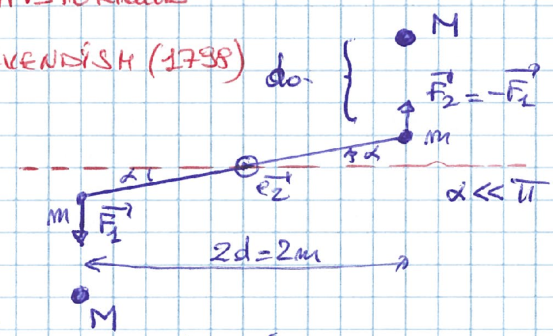
LE TMC / axe Oz DONNE $J\ddot{\alpha} = -C\alpha$

↳ $\ddot{\alpha} + \left(\frac{C}{J}\right)\alpha = 0$ OH de pulsation $\omega_0 = \sqrt{\frac{C}{J}}$

de période $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{2md^2}{C}}$ ⟹ $C \simeq 10^{-2}$ SI

MESURE DE G   TAMIP HISTORIQUE

$F_1 = F_2 = \frac{GMm}{d_0^2}$ EXP DE CAVENDISH (1798)



⟹ COUPLE DE FORCES

$\vec{\Gamma}_G = F_1 \cdot (2d)\,\vec{e_z}$

À L'ÉQUILIBRE, LE COUPLE $\vec{\Gamma}_G$ EST ÉQUILIBRÉ PAR LE COUPLE DE TORSION.

$$\frac{GMm}{d_0^2} \cdot (2d) = C\alpha$$

$$\Rightarrow \quad G = \frac{C\alpha\, d_0^2}{(2d)\, Mm}$$

ON EXPLOITE MAINTENANT QUE LE SPOT S'EST DÉCALÉ DE 2,42 mm CORRESPONDANT À UNE ROTATION DE 2α ⟹ $\alpha = \frac{2{,}42\ 10^{-3}}{2 \times 2{,}5} \simeq 4{,}84\ 10^{-3}$ rad

ON PEUT DONC ÉVALUER $\boxed{G \simeq 6{,}1\ 10^{-11}\ SI}$

ON CONNAÎT $G_{th} = 6{,}67\ 10^{-11}$

ERREUR D'ENVIRON 10 %