emu0

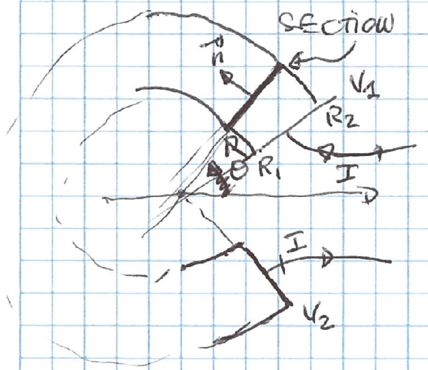
VOIR COURS POUR LE CALCUL DE LA RESISTANCE D'UN CONDUCTEUR CYLINDRIQUE USUEL.

DANS LE METAL (NON CHARGÉ $\rho = 0$), ON A :

$$\Delta V = 0 \qquad \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V \qquad \vec{j} = \gamma \vec{E}$$

METHODE : ON TROUVE V, ON CALCULE $\vec{E}$ PUIS $\vec{j}$

PUIS I PAR LE FLUX DE $\vec{j}$ À TRAVERS UNE SECTION DROITE $I = \iint \vec{j} \cdot \vec{n}\, dS$



DU FAIT DES SYMETRIES ON UTILISE LES COORDONNÉES ~~POLAIRES~~ CYLINDRIQUES DE CENTRE O. ET $\vec{n} = \vec{e_\theta}$

IL FAUT EVIDEMMENT LE FORMULAIRE

ON REMARQUE $V(r \in [R_1, R_2], z \in [0\ h], \theta = 0) = V_1$

$V(r \in [R_1, R_2], z \in [0\ h], \theta = 2\pi - \alpha) = V_2$

ATTENTION AU CHOIX DE L'ORIGINE DES ANGLES

JE CHERCHE DONC $V(r) = V(\theta)$ DANS LA PIECE.

FORMULAIRE $\Rightarrow \Delta V = V''(\theta) = 0 \Rightarrow \boxed{V(\theta) = A\theta + B}$

CL $\left. \begin{array}{l} V(\theta = 0) = V_1 \\ V(\theta = 2\pi - \alpha) = V_2 \end{array} \right\} \Rightarrow B = V_1 \qquad A = \dfrac{V_2 - V_1}{2\pi - \alpha}$

FORMULAIRE $\Rightarrow \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V = -\dfrac{A}{r} \vec{e_\theta}$

$$I = \iint \vec{j} \cdot \vec{n}\, dS = \gamma \iint \underbrace{\vec{E}}_{-\frac{A}{r}\vec{e_\theta}} \cdot \underbrace{\vec{n}}_{\vec{e_\theta}}\, dS = -A\gamma \int_{z=0}^{h} \int_{r=R_1}^{R_2} \frac{1}{r}\, dr\, dz = -A\gamma h \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{R = \frac{V_1 - V_2}{I} = \frac{2\pi - \alpha}{\gamma h \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}}$$

LOI D'Ω

emu 02.

1/3

(DEF) i_1 : courant se dirigeant vers l'armature definissant q_1
Id pour i_2
$\Rightarrow \quad i_1 = \dot{q}_1 \qquad i_2 = \dot{q}_2$

(LDM) DS LE CAS GENERAL :

$$E = R i_1 + L \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} + \frac{q_1}{C} \qquad 0 = L \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} + \frac{q_2}{C}$$

(a) R=0 et MISE EN FORME :

$$\boxed{\text{REM : } M < L}$$

$$\begin{cases} LC\ddot{q}_1 + MC\ddot{q}_2 + q_1 = CE & (1) \\ LC\ddot{q}_2 + MC\ddot{q}_1 + q_2 = 0. & (2) \end{cases}$$

EQUATIONS DIFFERENTIELLES COUPLÉES

$\boxed{\text{METHODE 1 POUR LE DECOUPLAGE}}$

IL FAUT LE SAVOIR

$Q = q_1 + q_2 \qquad q = q_1 - q_2$

$$(1)+(2) \Rightarrow \quad \ddot{Q} + \omega_2^2 Q = \omega_2^2 CE \quad \text{avec} \quad \omega_2 = \frac{1}{\sqrt{C(L+M)}}$$

$$(1)-(2) \Rightarrow \quad \ddot{q} + \omega_1^2 q = \omega_1^2 CE \quad \text{avec} \quad \omega_1 = \frac{1}{\sqrt{C(L-M)}}$$

Rem $M<L$

ON SAIT RESOUDRE LES DEUX EQUATIONS DIFF. DECOUPLÉES :

$$\begin{cases} Q(t) = CE + A_2 \cos(\omega_2 t) + B_2 \sin(\omega_2 t) \\ q(t) = CE + A_1 \cos(\omega_1 t) + B_1 \sin(\omega_1 t) \end{cases}$$

(CI) A t=0 | Continuité charge condensateur $\Rightarrow A_1 = A_2 = -CE$
| CONTINUITÉ COURANT DS BOBINE $\Rightarrow B_1 = B_2 = 0$

PUIS

$$q_1 = \frac{Q+q}{2} = CE - \frac{CE}{2}\left[\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)\right]$$

$$q_2 = \frac{Q-q}{2} = \frac{CE}{2}\left[\cos(\omega_1 t) - \cos(\omega_2 t)\right]$$

METHODE ELEGANTE SI ON SAIT FAIRE LE DECOUPLAGE emu02

2/3

METHODE 2 POUR LE DECOUPLAGE PASSAGE EN RSP(ω)

METHODE MECANIQUE QUI MARCHE TOUT LE TEMPS, MAIS TRÈS LOURD

JE FAIS LE DÉBUT POUR VOUS MONTRER QUE CE N'EST PAS ÉLÉGANT.

EN RSP(ω) $q_1(t) \hookrightarrow \underline{q_1}$ $q_2(t) \hookrightarrow \underline{q_2}$ $E \hookrightarrow \underline{E}$

$(1) \Rightarrow \underline{q_1}(1 - LC\omega^2) - MC\omega^2 \underline{q_2} = C\underline{E}$

$(2) \Rightarrow \underline{q_2}(1 - LC\omega^2) - MC\omega^2 \underline{q_1} = 0 \Rightarrow \underline{q_2} = \left(\frac{MC\omega^2}{1 - LC\omega^2}\right)\underline{q_1}$

ON REPORTE DANS (1) :

$$\Rightarrow \left[1 - 2LC\omega^2 + (L^2 - M^2)C^2\omega^4\right]\underline{q_1} = (1 - LC\omega^2)\underline{E}C$$

$\Downarrow$ PASSAGE EN RÉEL

$t > 0$ $q_1 + 2LC\ddot{q}_1 + (L^2 - M^2)C^2 q_1^{(4)} = e + LC\ddot{e} = EC$ ICI

SOLUTION PARTICULIÈRE $q_1 = CE$

SOLUTION GÉNÉRALE SANS SECOND MEMBRE : IL ME FAUT 4 SOLUTIONS POUR AVOIR UNE BASE

ON CHERCHE $q_1 = Ae^{rt}$ $A \neq 0$.

$\hookrightarrow r$ solution de $(L^2 - M^2)C^2 r^4 + 2LCr^2 + 1 = 0$. BICARRÉE

$X = r^2$ $(L^2 - M^2)C^2 X^2 + 2LCX + 1 = 0$.

$\hookrightarrow$ DEUX SOLUTIONS RÉELLES NÉGATIVES $X_1 = -\omega_1^2$ $X_2 = -\omega_2^2$

DONC LES QUATRES SOLUTIONS COMPLEXES : $j\omega_1, -j\omega_1, j\omega_2, -j\omega_2$

ET $q_{1g}(t) = \underline{\alpha}\, e^{j\omega_1 t} + \underline{\beta}\, e^{-j\omega_1 t} + \underline{\gamma}\, e^{j\omega_2 t} + \underline{\delta}\, e^{-j\omega_2 t}$

$\Downarrow$ ON EXTRAIT LES SOLUTIONS RÉELLES

$\alpha_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$ $\alpha_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$

ou plutôt

$\alpha_1' \cos(\omega_1 t) + \beta_1' \sin(\omega_1 t)$ $\alpha_2' \cos(\omega_2 t) + \beta_2' \sin(\omega_2 t)$

NE PAS OUBLIER D'AJOUTER CE POUR AVOIR LA SOLUTION COMPLÈTE.

MAINTENANT, IL FAUT FAIRE PAREIL AVEC q_2, ET TROUVER TOUTES LES CONSTANTES D'INTÉGRATION. ON ARRÊTE LÀ ?

emu 02

3/3

b) Si on tient maintenant compte de l'aspect résistif, l'aspect purement calculatoire dégénère (il aurait fallu la résistance R dans la seconde maille)

Mais on peut discuter.

La presence du frottement (R) entraine la presence finale d'un regime permanent continu. Pour la maille 1.

Celui-ci est facile à trouver : $i_1 = 0$ $q_1 = CE$

Pour la maille 2, en l'absence de couplage, on a un oscillateur harmonique de pulsation $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC'}}$. Comme il n'y a pas de frottement, ce regime perdure.

emu06.
On utilise les cooordonnées ($\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z$), l'axe Oz étant l'axe du fil selon le courant I. z=0 correspond à l'ordonnée de la résistance R. Faire un dessin.
En utilisant les conditions de symétries, invariance du champ magnétique et le théorème d'Ampère, on obtient le champ magnétique créé en M à la distance r du fil :

$$\vec{B}_{fil}(M) = \frac{\mu_o I}{2\pi r}\vec{e}_\theta$$

<u>Aspect électrique.</u>
On oriente le circuit électrique en définissant le courant i(t) dans le sens trigo , son vecteur normal est alors $\vec{e}_\theta$. On peut alors calculer le flux du champ magnétique à travers le circuit par une intégrale car le champ magntique n'est pas uniforme. On note z_{barre} l'ordonnée de la barre mobile.

$$\varphi = \iint_{z=0 \; et \; r=a}^{z=z_{barre} \; et \; r=a'} \vec{B}_{fil}(M).dr.dz\,\vec{e}_\theta = \frac{\mu_o I z_{barre}}{2\pi} Ln\left(\frac{a'}{a}\right)$$

On calcule alors la fem par :

$$e = -\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\frac{\mu_o I v_{barre}}{2\pi} Ln\left(\frac{a'}{a}\right) = Ri(t)$$

<u>Aspect mécanique.</u>
Référentiel terrestre galiléen.
Système : la barre mobile
On suppose le circuit électrique horizontal, et les forces de liaison sans frottement. Le poids et les forces de liaison s'équilibrent mutuellement. La force de Laplace subie par la barre est :

$$\vec{F}_{lap} = B\ell i\vec{e}_z$$

Pour avancer à vitesse constante, l'accélération doit être nulle et donc la force exercée par un opérateur extérieur doit doit compenser la force de Laplace :

$$\vec{F}_{op} = -B\ell i\vec{e}_z = \frac{\mu_o I B\ell v_{barre}}{2\pi R} Ln\left(\frac{a'}{a}\right)\vec{e}_z$$

La force est motrice.

emu07.

1)On utilise les cooordonnées $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$, l'axe Oz étant l'axe du fil selon le courant i(t).

$$i(t) = I_{eff}\sqrt{2}\,cos(\omega t)$$

Faire un dessin.

En utilisant les conditions de symétries, invariance du champ magnétique et le théorème d'Ampère, on obtient le champ magnétique créé en M à la distance r du fil :

$$\vec{B}_{fil}(M) = \frac{\mu_o i(t)}{2\pi r}\vec{e}_\theta$$

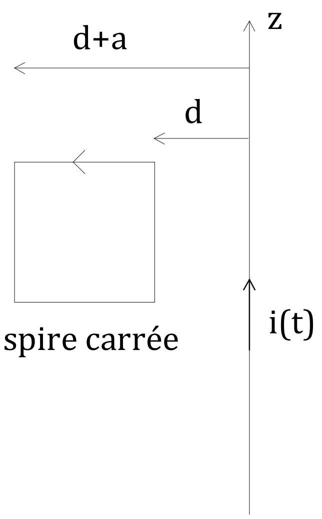
Les lignes de champs sont des cercle d'axe Ox orientées dans le sens trigonométrique.

2)μ_o en H.m^{-1} est la perméabilité magnétique du vide. Du point de vue dimension, c'est une inductance linéique.

3)Soit $\vec{n}$ le vecteur normal de la spire.Dans l'expression de la fem d'induction, va apparaître le produit $\vec{e}_\theta.\vec{n}$; pour maximiser les effets, il faut que ce produit soit le plus grand en valeur absolue. Les 2 vecteurs sont opposés ou égaux. Pour la suite, on prend égaux.

On va observer une tension sinusoïdale de fréquence 50Hz (60Hz aux USA et au Japon) de valeur moyenne nulle. Pour le voltmètre, si on se met en DC, il affichera 0, il faut se mettre en AC. Pour un oscilloscope, il vaudra mieux se mettre en DC , car le filtre passe-haut qui élimine la composante continue a des effets à la fréquence du secteur.

4)



On oriente les N spires carrées dans le sens trigo, son vecteur normal est alors $\vec{e}_\theta$. On peut alors calculer le flux du champ magnétique à travers la par une intégrale car le champ magntique n'est pas uniforme. On obtient :

$$\varphi = N \iint_{z=0\ et\ r=d}^{z=a\ et\ r=a+d} \vec{B}_{fil}(M).dr.dz\,\vec{e}_\theta = \frac{N\mu_o i(t)}{2\pi} Ln\left(\frac{d+a}{d}\right)$$

On calcule alors la fem par :

$$e(t) = -\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\frac{N\mu_o}{2\pi} Ln\left(\frac{d+a}{d}\right)\left(\frac{di}{dt}\right) = \frac{N\omega\mu_o}{2\pi} Ln\left(\frac{d+a}{d}\right) I_{eff}\sqrt{2}\,sin(\omega t) = Esin(\omega t)$$

On veut donc E>E_o=1,5V soit donc :

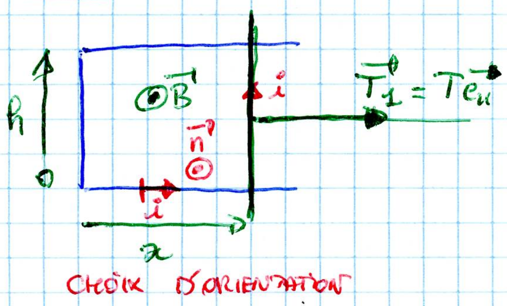
$$N > \frac{2\pi E_o}{\mu_o a\omega I Ln\left(\frac{d+a}{d}\right)\sqrt{2}} \approx 15$$

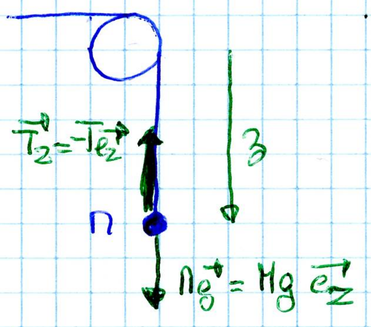
emu 08 -

PRECISIONS : Fil inextensible - ; Axe Ox vers la droite -
Axe Oz vers le bas : $\vec{B} = -B\vec{e_z}$ $\vec{g} = g\vec{e_z}$
IMPLICITEMENT $B > 0$, MAIS NE CHANGE PAS LES CALCULS -

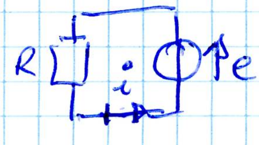
LOI DE LENZ : LA MASSE M EMPORTE LE BARREAU VERS LA DROITE CE QUI ENTRAÎNE UNE AUGMENTATION DE LA SURFACE DU CIRCUIT ELECTRIQUE - L'EFFET DE L'INDUCTION EST DE S'Y OPPOSER
$\Longrightarrow$ LA FORCE DE LAPLACE EST RÉSISTANTE

DESSINS ET NOTATIONS





ASPECT ELECTRIQUE $\Phi = \vec{B}\cdot\vec{n}\cdot xh = Bhx$



$$\Rightarrow \boxed{e = -\frac{\partial\Phi}{\partial t} = -Bh\dot{x} = Ri} \quad (1)$$

ASPECT MECANIQUE * FIL INEXTENSIBLE ~~ET~~ TENDU $\Rightarrow \boxed{\dot{z} = \dot{x}}$ (4)

SYSTEME 1 : BARREAU MOBILE ($\vec{N_1}$ et $\vec{N_2}$)

FORCES APPLIQUÉES : POIDS ET LES DEUX FORCES DE LIAISON VERTICALES
TENSION DU FIL $\vec{T_1} = T\vec{e_x}$
FORCE DE LAPLACE $\vec{F} = ihB\vec{e_x}$

$$\text{PFD} \quad m\ddot{x}\vec{e_x} = m\vec{g} + \vec{N_1} + \vec{N_2} + \vec{T_1} + \vec{F} \xrightarrow{Ox} \boxed{m\ddot{x} = T + Bhi} \quad (2)$$

SYSTEME 2 : MASSE M

FORCES APPLIQUÉES : POIDS ET TENSION DU FIL

$$\text{PFD} \quad M\ddot{z}\vec{e_z} = M\vec{g} + \vec{T_2} \xrightarrow{Oz} \boxed{M\ddot{z} = Mg - T} \quad (3)$$

ON ELIMINE T entre (2) et (3), $\ddot{z}$ avec (4), i avec (1)
ON POSE $v = \dot{x} = \dot{z}$

$$\text{ON OBTIENT} : \underbrace{\boxed{\left(\frac{(m+M)R}{B^2h^2}\right)}}_{\tau}\dot{v} + v = \underbrace{\boxed{\frac{MRg}{B^2h^2}}}_{v_{\infty}}$$

$$\Rightarrow v(t) = v_{\infty} + Ae^{-t/\tau} \xrightarrow{\text{CI}} \boxed{v(t) = v_{\infty}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$$