E th00. Conduction.

1) La loi de Fourier est $\vec{j}_Q = -\lambda.\overrightarrow{grad}(T)$

2)La puissance thermique émise par le mammifère est $P = \frac{4\pi R^3}{3} p_v$

On se place ici en coordonnées sphériques centrées sur le mammifère, dans l'eau soit donc $r \geq R$.
Le système est à symétrie sphérique et la puissance surfacique s'écrit donc : $\vec{j}_Q = j(r,t)\ \vec{e}_r$
En régime stationnaire, $j(r,t) = \mathrm{j(r)}$, $T(r,t) = \mathrm{T(r)}$ et la puissance traversant une sphère de rayon r s'écrit donc :

$$P(r) = 4\pi r^2 j(r) = Cte\ en\ régime\ permanent\ donc\ P(r) = P$$

La loi de Fourier $\vec{j}_Q = -\lambda.\overrightarrow{grad}(T)$ donne : $\vec{j}_Q.d\overrightarrow{OM} = -\lambda.\overrightarrow{grad}(T).d\overrightarrow{OM} = -\lambda.dT$
On prend maintenant un déplacement radial : $d\overrightarrow{OM} = dr\vec{e}_r$
On obtient alors :

$$j(r)dr = -\lambda.dT \quad soit \;\; j(r) = -\lambda.\frac{dT}{dr} = \frac{P}{4\pi r^2}$$

On intègre par rapport à r et on obtient :

$$T(r) = \frac{P}{4\pi\lambda r} + Cte$$

On a $T(\infty) = T_o$ donc :

$$T(r) = \frac{P}{4\pi\lambda r} + T_o$$

On obtient alors la température du mamifère en faisant r=R.

$$T_M = T(r = R) = \frac{P}{4\pi\lambda R} + T_o$$

3)

$$P = 4\pi\lambda R(T_M - T_o)$$

Soit encore :

$$p_v = \frac{3\lambda}{R^2}(T_M - T_o)$$

4)A différence de température donnée, la puissance volumique augmente et diverge si le rayon diminue vers 0. Les animaux à sang chaud ne pourront pas maintenir le déséquilibre qi ils sont trop petits.

E th01. Conduction et isolation.

1)P est une puissance surfacique. Pour avoir la puissance, il faut multiplier par une surface, en l'occurrence ici la surface latérale de la tige :

$$P_T(t) = 2\pi aL \times P = 2\pi aLh(\theta_T(t) - -).$$

2)La capacité calorique de la tige est , en faisant intervenir la masse volumique µ :

$$c_{Tige} = (masse)c_o = (\mu\pi a^2 L)c_o$$

A pression constante, pendant dt, le premier principe appliqué à la tige s'écrit :

$$dH = c_{Tige} d\theta_T(t) = \delta Q = -P_T(t)dt$$

Attention au signe -

On obtient alors l'équation différentielle suivante :

$$\left(\frac{\mu a c_o}{2h}\right)\frac{d\theta_T(t)}{dt} + \theta_T(t) = \theta_{air}$$

On reconnaît la constante de temps : $\tau = \left(\frac{\mu a c_o}{2h}\right)$. On aurait pû l'avoir par AD , mais sans le 2 et à condition de comprendre que L n'apparaît pas dans le calcul.

3)Si on touche la tige, on va se brûler et même gravement.

4)La température de surface de l'isolant sera plus petite que la température de la tige. Cela pourrait régler le problème des brûlures.

On utilise les coordonnées cylindriques selon l'axe de la tige. On peut écrire le flux de chaleur surfacique :

$$\vec{j}_Q = j(r,t)\,\vec{e}_r$$

Et la puissance thermique reçue par l'air prend la forme :

$$P = 2\pi(a+b)L \times j(r = a+b, t)$$

L'isolant limite les échanges thermiques donc fait chuter j, mais il augmente aussi la surface de contact avec l'air. On peut donc envisager que la puissance thermique reçue par l'air soit plus grande avec isolant que sans, donc que la tige se refroidisse plus vite avec isolant que sans.

th03.
Le problème est à symétrie sphérique, donc les flux thermiques sont radiaux, et le grandeurs ne dépendent que de la distance r au centre de la Terre.
Bilan thermique entre les spères de rayons r et r+dr en régime permanent , la puissance thermique reçue est nulle :

$$j(r)4\pi r^2 - j(r+dr)4\pi(r+dr)^2 + p\frac{4\pi}{3}((r+dr)^3 - r^3) = 0$$

On simplifie, on divise par dr et on fait apparaître les dérivées :

$$\frac{j(r)r^2 - j(r+dr)(r+dr)^2}{dr} + p\frac{1}{3}\left(\frac{(r+dr)^3 - r^3}{dr}\right) = 0$$

$$-\frac{d}{dr}(j(r)r^2) + pr^2 = 0$$

La loi de Fourier va donner : $j(r) = -\lambda\frac{dT}{dr}$ *soit finalement :*

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dT}{dr}\right) = -\frac{p}{\lambda}r^2$$

qui s'intègre en :

$$r^2\frac{dT}{dr} = cte - \frac{p}{3\lambda}r^3$$

Si on prende cte non nulle , on aura une divergente de T en 0. Donc on obtient :

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{p}{3\lambda}r$$

qui s'intègre en :

$$T(r) = cte2 - \frac{p}{6\lambda}r^2 = T(0) - \frac{p}{6\lambda}r^2$$

La CL fournie permet de sortir $p \approx 2.10^{-8}W.m^{-3}$

Ce qui permet d'évaluer $T(0) \approx 10^5K$

Valeur évidemment totalement inacceptable. Mais on peut envisager des températures suffisamment importantes pour obtenir un noyau liquide (ce qui semble le cas) donc des mouvement de convection plus efficaces pour le transfert thermique (donc T moins élevée au centre).
D'autre part, le noyau liquide ne semble pas radioactif.

ⓐ Equation de la chaleur unidimensionnelle (cf cours)

$$\mu C\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right) = \lambda\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right) \quad \text{soit ici} \quad \boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = K\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}} \quad (EQ)$$

ⓑ Du fait de la linéarité de l'equation differentielle, et de la CL en $x=0$, on cherche une solution sinusoïdale associée à $\theta_0 \cos(\omega t)$. Pour cela on adopte la notation complexe.

EQ devient $\quad j\omega\,\underline{\theta}(x) = K\,\ddot{\underline{\theta}}(x)$.

soit $\quad \ddot{\underline{\theta}} - j\frac{\omega}{K}\,\underline{\theta} = 0.$

on cherche $\underline{\theta}(x) = e^{rx}\cdot$ cte

$$r^2 = j\frac{\omega}{K} = e^{j\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{\omega}{K} = \left(\pm\, e^{j\frac{\pi}{4}}\sqrt{\frac{\omega}{K}}\right)^2$$

on trouve donc 2 solutions pour r : $\quad r = \pm(1+j)\sqrt{\frac{\omega}{2K}}$ $\to \frac{1}{\delta}$

Le milieu n'étant pas délimité pour $x>0$, il faut éliminer la solution + pour éviter la DV à l'∞.

AVEC CES CL, on obtient $\quad \underline{\theta}(x,t) = \theta_0\, e^{-\frac{x}{\delta}}\, e^{j(\omega t - \frac{x}{\delta})}$

$$\theta(x,t) = \theta_0 \underbrace{e^{-\frac{x}{\delta}}}_{\text{ATTENUATION}} \underbrace{\cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)}_{\text{PROPAGATION}}$$

ⓒ

(AN) $T = 86400$ s $\qquad \delta \simeq 14$ cm.

Pour éliminer l'influence de l'alternance jour-nuit, il faut une epaisseur de quelques δ.

ⓓ Epaisseur $= \delta \ln(10) \simeq 32$ cm.

Petit Pb : pour resoudre, on a supposé l'epaisseur du mur infinie (élimination de la solution +)

th05.

On va avoir un flux thermique de l'eau (zone "chaude") vers l'air (zone "froides")

Entre $z=0$, $T(0)=T_a$ et $z=h(t)$ $T(h)=T_F$

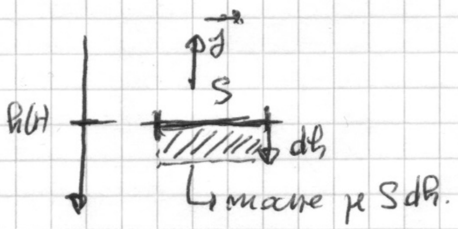
on a $$j = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{\mu c}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t}$$

La phrase "La capacité thermique de la glace ... négligeable" semble signifier $c \to 0^+$ soit donc $\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$. LOI LINEAIRE

Donc pour $z \in [0 \ h(t)]$, on a $$T(z) = T_a + \frac{z}{h(t)}(T_F - T_a)$$

et donc $$j = -\frac{\lambda}{h(t)}(T_F - T_a)$$

Isolons une section S de l'interface glace - eau liquide



si pendant dt, h varie de dh, la masse $\mu S dh$ d'eau devient glace et libère une énergie calorifique $\mu L S dh$ qui va partir vers les zones froides donc vers le haut et qui est donc aussi $-j.S dt$.

↳ $j = \mu L \frac{dh}{dt}$

On égalise les 2 expressions $\Rightarrow$ $$h.\left(\frac{dh}{dt}\right) = \frac{\lambda(T_F - T_a)}{\mu L}$$

on intègre entre $(t=0, h=0)$ et le point courant $(t, h(t))$

↳ $$h(t) = \sqrt{\frac{2\lambda(T_F - T_a)}{\mu L} . t}$$ Rem : $T_F > T_A$