ondes01.

Loi d'Ω aux bornes de la bobine $\Rightarrow \lambda\left(\frac{\partial i}{\partial t}\right) = -\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$ (α)

LDN $\Rightarrow \frac{\partial i}{\partial x} = -\gamma \frac{\partial u}{\partial t}$

Avec le théorème de Schwartz, on retrouve les equations de propagations pour i et u avec une vitesse de propagation $c = \frac{1}{\sqrt{\lambda\gamma}}$

En $x=0$, le generateur crée une onde sinusoïdale progressive selon les $x\nearrow$. Comme la ligne est infinie, ss defaut, il n'y a aucun retour.

~~En~~ notant $u(0,t) = u_0 \cos(\omega t)$, on obtient $u(x,t) = u_0 \cos(\omega t - kx)$

avec $k = \frac{\omega}{c}$.

L'integration de (α) par rapport au temps va donner.

$$i(t) = \frac{u_0 k}{\lambda\omega} \cos(\omega t - kx) + \underbrace{f(x)}$$

Rien à voir avec l'onde créée par le generateur $\Rightarrow f(x) = 0$.

on verifie alors $\boxed{u(t) = R_c \cdot i(t)}$

avec $R_c = \sqrt{\frac{\lambda}{\gamma}}$ analogue à une resistance.

Proposition de solution.

1)LDM entre les abscisses x et x+dx :

$$v(x,t) - v(x+dx,t) = (Rdx)i(x,t) + (Ldx)\frac{\partial i(x,t)}{\partial t}$$

On divise par dx qu'on fait tendre ensuite vers 0, ce qui fait apparaître la dérivée partielle $\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}$

On obtient : $-\frac{\partial v}{\partial x} = Ri + L\frac{\partial i}{\partial t}$

LDN : le courant i(x,t) se sépare en 3 :

$$i(x,t) = i(x+dx,t) + (Cdx)\frac{\partial v(x+dx,t)}{\partial t} + (Gdx)v(x,t)$$

On divise par dx qu'on fait tendre ensuite vers 0, ce qui fait apparaître la dérivée partielle $\frac{\partial i(x,t)}{\partial x}$

On obtient : $-\frac{\partial i}{\partial x} = C\frac{\partial v}{\partial t} + Gv$

On dérive la première par rapport à x. On peut alors introduire la seconde dans les expressions des dérivées de l'intensité, pour lesquelles on utilisera le théorème de Schwartz. On obtient l'équation fournie avec uniquement des signes +.

2a)On introduit la forme proposée dans l'EDP précédente et on sort sans problème :

$$\gamma^2 = (RG - LC\omega^2) + j\omega(RC + LG) = \|\gamma\|^2 e^{j\theta}$$

Les deux solutions pour γ sont opposées et on peut les écrire $\pm\|\gamma\|e^{j\theta/2}$. La partie imaginaire est positive donc on peut prendre θ entre 0 et $+\pi$. Donc $\theta/2$ est compris entre 0 et $+\pi/2$. Donc une des racines est dans le premier quadrant, on peut l'écrire $\gamma_1=k_a+jk_b$ avec k_a et k_b réels positifs et l'autre solution est son opposée.

2bc)

On obtient $\underline{V_1}(x) = \underline{A}_1 \cdot e^{k_a x + jk_b x}$ d'où : $\underline{v}_1(x,t) = \underline{A}_1 \cdot e^{k_a x} \cdot e^{j(\omega t + k_b x)}$

La seconde exponentielle indique une onde se propageant selon les x décroissant et la première exponentielle indique alors une atténuation de l'amplitude de l'onde au cours de la propagation. L'écriture de cette onde peut prêter à confusion.

Pour l'onde n°2, on obtient une onde se propageant selon les x croissant, donc dont l'amplitude décroît aussi au cours de la propagation.

k_b est la pulsation spatiale de l'onde associée à la propagation, k_a est associé à l'absorption de l'onde au cours de sa propagation : l'onde va se propager sur quelques $1/k_a$.

2d)Une onde sinusoïdale quelconque sera une combinaison linéaire des deux solutions précédentes.

3)La vitesse de phase est $v_\varphi = \frac{\omega}{k_b}$ qui va dépendre de ω, donc les deux ondes ne vont pas se propager à la même vitesse. Donc, en plus de l'atténuation, il va y avoir déformation de l'onde : l'onde la plus rapide s'éloigne de plus en plus de l'onde la plus lente. On aura dispersion de l'onde.

Pour une onde quelconque, on observera les deux mêmes phénomènes : atténuation au cours de la propagation et déformation (elle semble s'étaler) de l'onde.