

Oral TD5 : intégrales à paramètres

Exercice 1 (Mines-Télécom PSI 2024)

Soit $u_n = \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \cos(x) dx$. Étudier la convergence de la suite (u_n) .

Exercice 2 (Mines-Télécom PSI 2024)

Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{e^t - 1} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1 + n^2}$ en montrant la convergence de la série et de l'intégrale. (*)

Exercice 3 (CCINP PSI 2024)

Soit $b > 0$. On pose : $I(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x}{t}}}{\sqrt{t}} e^{-bt} dt$ pour $x \geq 0$.

1. I est-elle bien définie ? Continue ?
2. Montrer que I est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
3. Montrer que pour $x > 0$: $I(x) = 2 \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{u^2}} e^{-bu^2} du$ et $I'(x) = -2 \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x}{u^2}} e^{-bu^2}}{u^2} du$.
4. Montrer à l'aide d'un changement de variable judicieux que : $\forall x > 0, I'(x) = -\sqrt{\frac{b}{x}} I(x)$.
5. En déduire l'expression de I .

Exercice 4 (Mines-Ponts PSI 2024)

Soient $\alpha > 0$ et $I(x) = \int_0^1 \frac{dt}{x^\alpha + t^4}$

1. Montrer que I est définie et continue sur $\mathbb{R}^{+*}$
2. Trouver les limites et des équivalents de I en 0 et $+\infty$. (*)

Exercice 5 (Centrale PSI 2022)

Soient $\lambda > -\frac{1}{2}$, $\varphi_\lambda(t) = (1 - t^2)^{\lambda - \frac{1}{2}}$ et $I_\lambda(x) = \int_0^1 \varphi_\lambda(t) \cos(xt) dt$

1. φ_λ est-elle intégrable sur $[0, 1[$?
2. Montrer que I_λ est définie et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ puis exprimer I_λ'' en fonction de $I_{\lambda+1}$ et $I_{\lambda+2}$
3. Montrer que I_λ est développable en série entière.

Exercice 6 (Mines-Ponts PSI 2023)

Soit $I = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt$

1. Montrer que I existe
2. Montrer que $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-xt}}{t} \sin(t) dt$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$. (*)
3. Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et en déduire la valeur de I .

Indications

Exercice 2

Utiliser $|\sin t| \leq t$ sur $\mathbb{R}^+$

Exercice 4

2. Pour l'équivalent en 0, poser $u = x^{-\alpha/4}t$

Exercice 6

2. Pour $\mathcal{C}^0$, écrire $f(x) = I - \sum_{n \geq 0} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{e^{-xt}}{t} \sin(t) dt$ et vérifier la CVU de la série de fct.