

Exercice 1 (CCINP PSI 2023)

Soient $a_0, \dots, a_n$ des réels et $\varphi(P, Q) = \sum_{k=0}^n P(a_k)Q(a_k)$ pour $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$.

1. Donner une CNS pour que φ soit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$; on suppose cette condition réalisée par la suite.
2. Trouver $F^\perp$ où $F = \left\{ P \in \mathbb{R}_n[X], \sum_{k=0}^n P(a_k) = 0 \right\}$
3. Calculer la distance de X^n à F .

Exercice 2 (CCINP PSI 2024)

Soit $\phi(A, B) = \int_0^{+\infty} A(t)B(t)e^{-t} dt$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}[X]$.

1. Montrer que ϕ définit un produit scalaire qu'on notera $(\cdot | \cdot)$ puis que $(X^k | 1) = k!$.
2. On pose Q le projecteur de 1 sur $F = \text{Vect}(X, X^2, \dots, X^n)$, montrer qu'il existe $(a_k)_{1 \leq k \leq n}$ tel que $Q = \sum_{k=1}^n a_k X^k$.
3. On pose $P = 1 - \sum_{k=1}^n a_k \prod_{j=1}^k (X + j)$ Calculer $(1 - Q | X^i)$; en déduire $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, P(i) = 0$ puis une expression de P .
4. Montrer que $\inf_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} \int_0^{+\infty} (1 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \dots + \alpha_n t^n)^2 e^{-t} dt = \frac{1}{n+1}$.

Exercice 3 (CCINP PSI 2023)

Soient $A, B \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telles que $M = \frac{1}{3}(A + 2B)$ soit orthogonale. On pose $C = A^T B$

1. Calculer $A^T B + B^T A$
2. En déduire un polynôme annulateur de C . (*)
3. Montrer que $\ker(C - I_n)$ et $\text{Im}(C - I_n)$ sont supplémentaires. (*)
4. Montrer $A = B$

Exercice 4 (CCINP PSI 2023)

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M(M^T M)^2 = I_n$.

1. Montrer que M est inversible.
2. Montrer que M est symétrique.
3. Montrer que $M = I_n$.

Exercice 5 (CCINP PSI 2022)

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une famille libre de E , espace préhilbertien, telle que $\forall x \in E, \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n (e_i | x)^2$

1. Montrer que, pour $1 \leq i \leq n, \|e_i\| \leq 1$.
2. Soit x un vecteur unitaire et orthogonal à $\text{Vect}\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$. Calculer $(x | e_n)^2$ et en déduire $\|e_n\|$. (*)
3. Montrer que $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormale de E .

Exercice 6 (Mines-Ponts PSI 2022)

Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Soit $\alpha > 0$.

1. Le produit de matrices carrées symétriques est-il symétrique?
2. Montrer que $I_n + \alpha A$ est inversible.
3. Montrer que $M = (I_n - \alpha A)(I_n + \alpha A)^{-1}$ est diagonalisable et $\text{Sp}(M) \subset]-1, 1]$. (*)

Exercice 7 (Mines-Ponts PSI 2024)

Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des matrices symétriques réelles définies positives de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle, montrer que $\text{Tr}(AA^T) > 0$
 2. Soit $S \in \mathcal{E}$. Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = A^T A$
 3. Soit $(S, S') \in \mathcal{E}^2$. Montrer $\text{Tr}(SS') > 0$
-

Indications

Exercice 3

2. *C est orthogonale.*
3. *Ils sont orthogonaux.*

Exercice 5

2. *Cauchy-Schwarz*

Exercice 6

3. *Diagonaliser*