Oral TD8 : probabilités

Exercice 1 (CCINP PSI 2021)

Soient $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $M = J - I_3$. On note A , B et C trois points du plan sur lesquels une puce peut se déplacer ; si elle est sur un point à un instant, elle saute de façon équiprobable sur l'un des deux autres à l'instant suivant. On note A_n l'événement « la puce est en A à l'instant n » (recip. B_n et C_n en B et en C) et $U_n = \begin{pmatrix} P(A_n) \\ P(B_n) \\ P(C_n) \end{pmatrix}$

1. Trouver une relation entre U_{n+1} et U_n .
2. Diagonaliser M et en déduire une expression de M^n
3. Trouver un polynôme annulateur de J et en déduire une autre expression de M^n .
4. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

Exercice 2 (CCINP PSI 2023)

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que $P(X = i) = \frac{i}{2^{i+1}}$ pour $i \geq 1$. On considère une urne qui contient X boules numérotées de 1 à X ; on tire une boule au hasard dans cette urne et on note Y le numéro de la boule tirée.

1. Vérifier qu'une telle variable aléatoire X existe.
2. Calculer $E(X)$.
3. Donner la loi conjointe de X et Y .
4. Déterminer la loi de Y puis son espérance.

Exercice 3 (CCINP PSI 2023)

Soient α, β deux réels strictement positifs, X et Y deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que

$$P(X = i, Y = j) = \begin{cases} \frac{e^{-\beta} \beta^i \alpha^j (1 - \alpha)^{i-j}}{j!(i-j)!} & \text{si } 0 \leq j \leq i \\ 0 & \text{si } j > i \end{cases}$$

1. Déterminer les lois de X et Y
2. X et Y sont-elles indépendantes ?
3. On pose $Z = X - Y$; déterminer la loi de Z
4. Déterminer $P(Y = j | Z = n)$ et conclure

Exercice 4 (Mines-Ponts PSI 2024)

On considère une urne composée de n boules : une est rouge, b sont blanches, $n - b - 1$ sont noires. On note $p = \frac{b}{n-1}$. L'expérience consiste à tirer des boules avec remise et de s'arrêter lorsque la boule rouge est tirée. On note : T la variable aléatoire comptant le nombre de tirages effectués en incluant celui de la boule rouge et X la variable aléatoire comptant le nombre de boules blanches tirées.

1. Soit $r \in \mathbb{N}$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq r} \binom{n}{r} x^{n-r}$ dont on calculera la somme.
2. Donner la loi de probabilité de T .
3. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, $i \in \mathbb{N}$, calculer $P_{(T=k)}(X = i)$.
4. En déduire la loi de X , calculer son espérance et sa variance. (*)

Exercice 5 (CCINP PSI 2024)

On dispose d'une urne contenant n boules blanches et n boules rouges. On effectue des tirages selon la règle suivante : si l'on pioche une boule rouge, on la remet dans l'urne ; si l'on pioche une boule blanche, on la met de côté et on rajoute une boule rouge dans l'urne.

On note la variable aléatoire X_p qui désigne le nombre de boules blanches dans l'urne au $p^{\text{ème}}$ tirage, pour tout p entier naturel non nul.

1. Donner la loi de X_1 et X_2 .
2. Pour tout p entier naturel, calculer $P(X_p = n)$ et $P(X_p = n - p)$.
3. Donner une relation entre $P(X_{p+1} = k)$, $P(X_p = k + 1)$, $P(X_p = k)$.
4. Justifier que la fonction génératrice G_p est polynomiale.

5. On admet la relation $G_{p+1}(t) = G_p(t) + \frac{1-t}{2n}G'_p(t)$.

Donner une relation entre $E(X_{p+1})$ et $E(X_p)$. Calculer $E(X_p)$.

Calculer sa limite lorsque t tend vers $+\infty$. Interpréter.

Exercice 6 (Mines-Télécom PSI 2023)

Un pion se déplace sur une droite : il se déplace d'un cran vers la droite avec la probabilité $p \in]0, 1[$ et vers la gauche avec la probabilité $1 - p$. À l'instant initial, il est à l'origine du repère et on note X_n sa position après n déplacements.

1. Que vaut $X_n(\Omega)$? (*)
2. On note D_n le nombre de déplacements vers la droite au cours des n premiers instants. Relier X_n à D_n .
3. Déterminer les lois de D_n et X_n .
4. Calculer l'espérance de X_n .

Exercice 7 (Mines-Ponts PSI 2023)

Soit $(X_k)_{k \geq 1}$ une suite de variables aléatoires discrètes indépendantes suivant $\mathcal{B}\left(\frac{2}{3}\right)$. On définit les événements $A_k =$

$(X_{2k-1}X_{2k} = 0)$, $B_p = \bigcap_{k=1}^p A_k$ et la variable aléatoire discrète $T = \min\{k \geq 2, X_{k-1} = X_k = 1\}$

1. Montrer que $P\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k\right) = 1$ et en déduire $P(T \in \mathbb{N}) = 1$
2. Trouver une relation de récurrence vérifiée par la suite $(P(T = n))_{n \in \mathbb{N}}$. (*)
3. Déterminer l'espérance de T . (*)

Indications

Exercice 4

4. Reconnaître $1 + X$.

Exercice 6

1. Distinguer n pair et n impair

Exercice 7

2. Conditionner par la valeur de X_1 .
3. Trouver une équation vérifiée par $E(T)$ à l'aide de 2.