

ÉTUDE D'UN FILTRE



En **rouge** : les résultats des mesures. En **vert** : les réponses aux questions théoriques.
Souvent, malheureusement, les comptes-rendus se limitent à ça !

Le compte-rendu doit également comporter :

- des **figures et de graphes** (même s'ils sont présents dans l'énoncé) rendant compte des **observations**,
- **des commentaires et des interprétations** (même s'ils ne sont pas demandés explicitement), ici en **jaune**,
- et enfin, pour le savoir-faire expérimental, de vos **remarques pratiques**, ici en **bleu**.

Q.1) Attention ! f_0 n'est pas la fréquence de coupure à 3 dB.

C'est la fréquence pour laquelle les asymptotes en B.F et H.F se coupent car $G(\omega) \underset{\omega \rightarrow 0}{\sim} H_0$ et $G(\omega) \underset{\omega \rightarrow \infty}{\sim} \frac{H_0 \omega_0^2}{\omega^2}$. C'est donc la fréquence de cassure.

Si on regarde l'équation différentielle, on voit aussi que f_0 est la fréquence (hypothétique) des oscillations libres ($V_e = 0$), non amorties ($Q \rightarrow \infty$) du système.

Pour la fréquence $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$, on a $H = -jQH_0$ donc $\varphi = -90^\circ$ et $G = QH_0$.

On peut donc déterminer expérimentalement f_0 en cherchant la valeur de fréquence pour laquelle $\varphi = -90^\circ$.

Q.2) Posons $x = \frac{\omega}{\omega_0}$: $G(x) = \frac{H_0}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}}$. On pose $x \mapsto F(x) = (1-x^2)^2 + x^2/Q^2$, fonction dont la dérivée

$F'(x) = 4x \left[x^2 - 1 + \frac{1}{2Q^2} \right]$ s'annule en $x_r = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$ si $Q > 1/\sqrt{2}$, ou bien est toujours positive si $Q \leq 1/\sqrt{2}$. L'étude des

variations montre que si $Q > 1/\sqrt{2}$, F est minimale en $x = x_r = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$, donc le gain G est maximal.

Il n'y a donc résonance que si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$ et que la fréquence de résonance vaut $f_{rés.} = f_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$.

2. RÉPONSE FRÉQUENTIELLE

On effectue un rapide balayage en fréquences pour constater que le filtre est bien un passe-bas, avec une résonance.

La tension d'entrée doit être suffisamment grande pour avoir des signaux faciles à synchroniser et pas perturbés par le bruit de fond, mais la sortie ne doit pas saturer lors de la résonance. Ici, une amplitude de 2 V répond à ces deux critères.

Si on utilisait un multimètre, il devrait être réglé en V sur le mode AC pour couper les composantes continues, c'est indispensable pour des mesures de gain.

Attention ! L'amplitude de la tension d'entrée peut varier si le G.B.F (de résistance interne $r = 50 \Omega$) débite sur une charge dont l'impédance d'entrée (qui dépend de la fréquence) n'est pas très grande devant r . Ceci arrive fréquemment. Il convient donc de toujours mesurer la tension d'entrée.

On utilise ici les fonctions de mesure automatique de l'oscilloscope : amplitude crête-à-crête (pour s'affranchir d'une éventuelle tension de décalage) de l'entrée et de la sortie, déphasage de la sortie par rapport à l'entrée (contrôler le signe car les oscilloscopes mesurent souvent des retards de phase et pas des avances de phase...). Ces mesures ne donnent de bons résultats que si les courbes affichés sont suffisamment grandes : utiliser les calibres pour que cela soit le cas. Noter que les incertitudes dépendent du calibre utilisé.

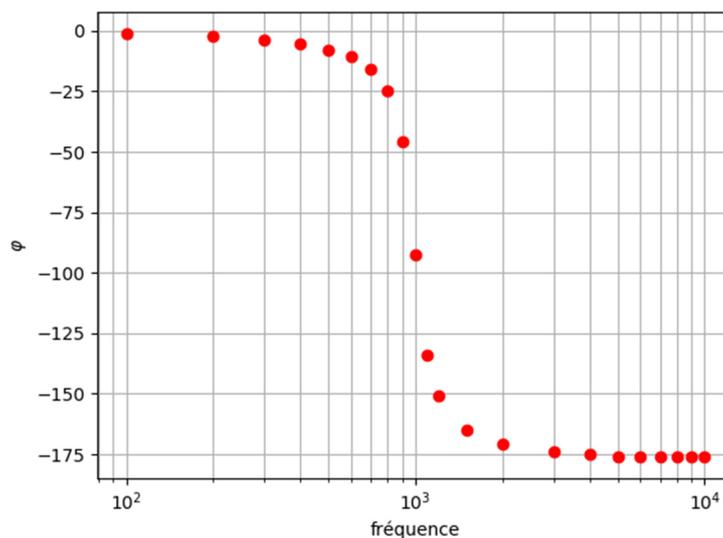
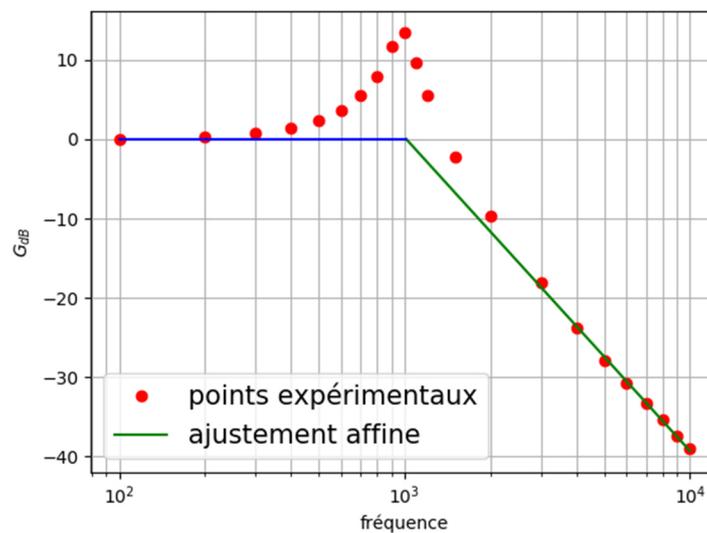
f (kHz)	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	1,1
V_{ecc} (V)	4,96	4,96	4,96	4,96	4,96	4,96	4,96	4,96	4,96	4,96	4,96
V_{scc} (V)	4,96	5,12	5,40	5,84	6,48	7,52	9,36	12,4	19,0	23,4	15,0
φ (°)	-1	-2	-4	-5,5	-8	-10,5	-15,7	-24,5	-45,5	-92,5	-134

f (kHz)	1,2	1,5	2	3	4	5	6	7	8	9	10
V_{ecc} (V)	4,88	4,96	4,96	4,8	4,92	4,92	4,84	4,84	4,80	4,80	4,80
V_{scc} (V)	9,28	3,8	1,64	0,596	0,320	0,20	0,14	0,104	0,082	0,0648	0,054
φ (°)	-151	-165	-171	-174	-175	-176	-176	-176	-176	-176	-176

>>> Les valeurs de déphasages affichées par l'oscilloscope fluctuent. On borne l'intervalle des valeurs possibles de f_0 par une valeur inférieure telle que le déphasage affiché reste supérieur à -90° et par une valeur supérieure telle que le déphasage affiché reste inférieur à -90° .

On mesure $f_0 \in [992 \text{ Hz}, 997 \text{ Hz}]$.

Pour la fréquence centrale $f_0 = 994,5 \text{ Hz}$, on mesure un gain $G = QH_0 = \frac{20,8}{4,32} = 4,81$. On en déduit $Q = 4,81$.



On voit qu'avec cette méthode, les incertitudes sur les valeurs de f_0 et de Q sont assez grandes (forte pente de la courbe de phase dans le diagramme de Bode).

>>> Asymptotes :

$f \rightarrow 0$ pente : 0 dB/décade $\varphi \rightarrow 0$ $f \rightarrow \infty$ pente : -39,5 dB/décade $\varphi \rightarrow -180^\circ$

La pente en H.F est bien compatible avec un passe-bas du second ordre.

Les asymptotes se coupent en un point d'abscisse égale théoriquement à la fréquence f_0 , valeur entachée d'une grande incertitude (non évaluée) vu l'incertitude sur la pente de l'asymptote en hautes fréquences.

$$f_0 = 1014 \text{ Hz}$$

>>> Le gain statique est mesuré en envoyant deux signaux continus V_{e1} et V_{e2} (mode DC du G.B.F) que l'on mesure à l'oscilloscope, ainsi que les valeurs correspondantes de V_s : V_{s1} et V_{s2} .

On a alors $H_0 = \frac{V_{s2} - V_{s1}}{V_{e2} - V_{e1}}$. Cette méthode a pour avantage d'éliminer l'effet d'une éventuelle tension continue de décalage en sortie.

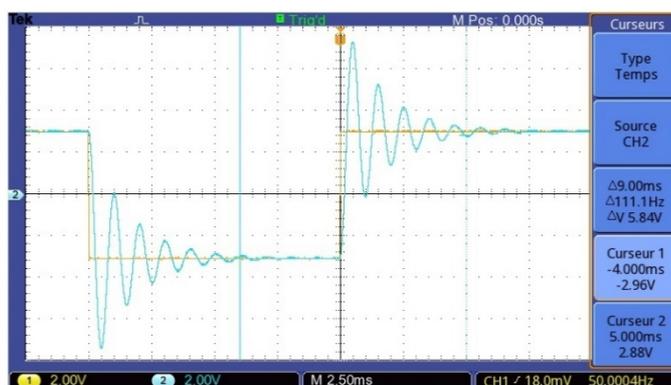
On mesure $V_{s1} = 10,1 \text{ V}$ pour $V_{e1} = 10,1 \text{ V}$, et $V_{s2} = -10,0 \text{ V}$ pour $V_{e2} = -10,1 \text{ V}$. On trouve donc $H_0 = 1,0$.

3. RÉPONSE INDICIELLE

3.1 Obtention de la réponse indicielle

Q.3) La période T des créneaux soit suffisamment grande pour que le signal présente des asymptotes horizontales ($T \gg \tau$, temps de réponse du système).

On règle le G.B.F pour qu'il envoie des signaux en créneaux de basse fréquence (entre 10 Hz et 50 Hz) afin que le signal atteigne sa valeur continue. L'amplitude des créneaux doit être réglée pour que le signal ne sature pas et qu'il s'affiche en entier sur l'écran.



On mesure à l'aide des curseurs l'écart Γ entre les asymptotes ainsi que l'amplitude E crête-à-crête de la tension d'entrée en créneaux.

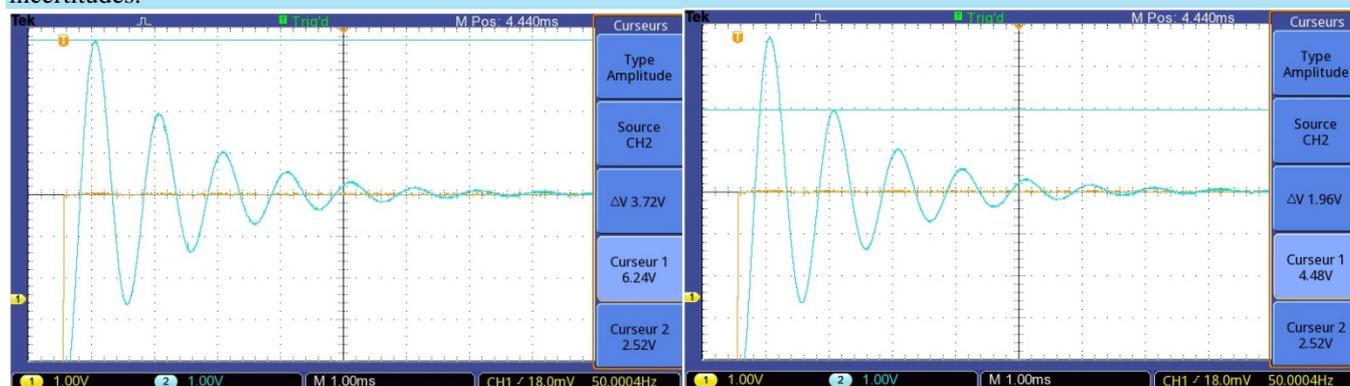
Ici les mesures sont inutiles car on a $\Gamma = E$.

$$\text{On en déduit } H_0 = \frac{\Gamma}{E} = 1,0.$$

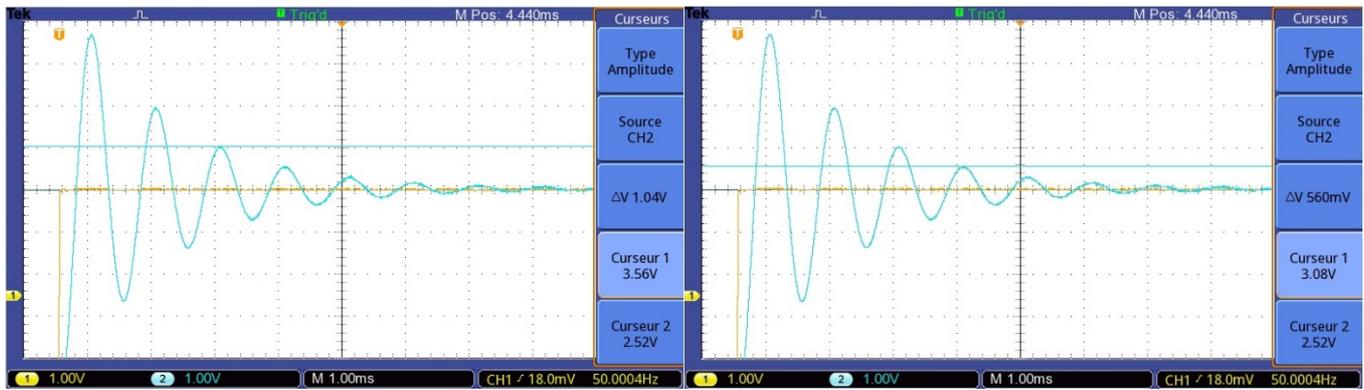
3.2 Détermination du facteur de qualité

On décale et on amplifie le signal de sortie pour diminuer les incertitudes de mesure.

On peut aussi mesurer les dépassements en plaçant l'asymptote supérieure du signal en bas de l'écran pour diminuer encore les incertitudes.



On mesure alors D_1 , D_1 , etc. par différence entre deux curseurs de tension, l'un étant positionné sur l'état de repos du signal de sortie :



$$D_1 = 3,72 \text{ V}$$

$$D_2 = 1,96 \text{ V}$$

$$D_3 = 1,04 \text{ V}$$

$$D_4 = 0,560 \text{ V}$$

On mesure également $\Gamma = 5,10 \text{ V}$, donc $\Delta = \frac{D_1}{\Gamma} = 72,9\%$. Les sauts de curseurs sont de $0,04 \text{ V}$.

Q.4) On cherche à calculer les dépassements successifs $\Delta_i > 0$ (valeurs maximales de $r(t) = \frac{s(t)}{H_0 E} - 1$). On pose $\sigma = \frac{1}{2Q}$:

$$r(t) = -\frac{1}{\sqrt{1-\sigma^2}} e^{-\sigma\omega_0 t} \cos\left(\omega_0 t \sqrt{1-\sigma^2} - \arctan \frac{\sigma}{\sqrt{1-\sigma^2}}\right). \text{ On pose } \tan \psi = -\frac{\sigma}{\sqrt{1-\sigma^2}}.$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-\sigma^2}} e^{-\sigma\omega_0 t} \left(\sigma \cos\left[\omega_0 t \sqrt{1-\sigma^2} + \psi\right] + \sqrt{1-\sigma^2} \sin\left[\omega_0 t \sqrt{1-\sigma^2} + \psi\right] \right)$$

$$\frac{dr}{dt} = 0 \Leftrightarrow \tan\left[\omega_0 t \sqrt{1-\sigma^2} + \psi\right] = -\frac{\sigma}{\sqrt{1-\sigma^2}} = \tan \psi. \text{ La première valeur correspond à l'instant initial } t = 0 \text{ (ce n'est pas un}$$

dépassement). Les dépassements successifs $\Delta_i > 0$ correspondent à $t_i = \frac{(2i-1)\pi}{\omega_0 \sqrt{1-\sigma^2}}$.

Pour ces valeurs $r(t_i) = \Delta_i = \frac{1}{\sqrt{1-\sigma^2}} e^{-\sigma\omega_0 t_i} \cos \psi = e^{-\frac{\sigma(2i-1)\pi}{\sqrt{1-\sigma^2}}}$ et on a accès au facteur d'amortissement σ en mesurant le

$$\text{décrément logarithmique } \Lambda = \ln \frac{\Delta_i}{\Delta_{i+1}} = \frac{2\sigma\pi}{\sqrt{1-\sigma^2}} \Rightarrow \sigma = \frac{\Lambda}{\sqrt{\Lambda^2 + 4\pi^2}} \text{ soit } Q = \frac{\sqrt{4\pi^2 + \Lambda^2}}{2\Lambda}$$

$$\text{En utilisant le premier dépassement, on a } \Delta = \Delta_1 = e^{-\frac{\sigma\pi}{\sqrt{1-\sigma^2}}} \Rightarrow \sigma = \frac{|\ln \Delta|}{\sqrt{\pi^2 + (\ln \Delta)^2}} \text{ ou } Q = \frac{\sqrt{\pi^2 + (\ln \Delta)^2}}{2|\ln \Delta|}$$

$$\text{La pseudo pulsation des oscillations vaut } \omega = \frac{2\pi}{T} = \omega_0 \sqrt{1-\sigma^2} = \omega_0 \frac{\sqrt{4Q^2 - 1}}{2Q}.$$

$$\text{On déduit de la mesure de la pseudo période } T \text{ la fréquence des oscillations non amorties } f_0 = \frac{2Q}{T\sqrt{4Q^2 - 1}}.$$

$$\text{On a } Q = \frac{\sqrt{\pi^2 + (\ln \Delta)^2}}{2|\ln \Delta|} = 5,00$$

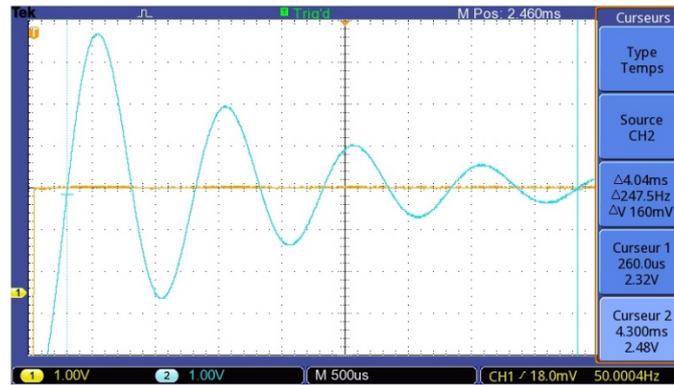
$$\text{On calcule } \ln \frac{D_1}{D_2} = 0,641 ; \ln \frac{D_2}{D_3} = 0,634 ; \ln \frac{D_3}{D_4} = 0,619.$$

La valeur du décrément logarithmique varie peu ici. L'incertitude sur la mesure des dépassements successifs, de plus en plus petits, est de plus en plus grande. On garde en pratique la première valeur $\Lambda = \ln \frac{D_1}{D_2}$.

$$\Lambda = 0,641 \Rightarrow Q = \frac{\sqrt{4\pi^2 + \Lambda^2}}{2\Lambda} = 4,93$$

On conserve la première valeur de Q qui semble être déterminée avec moins d'incertitudes, les valeurs de D_1 et Γ étant grandes.

3.3 Détermination de f_0

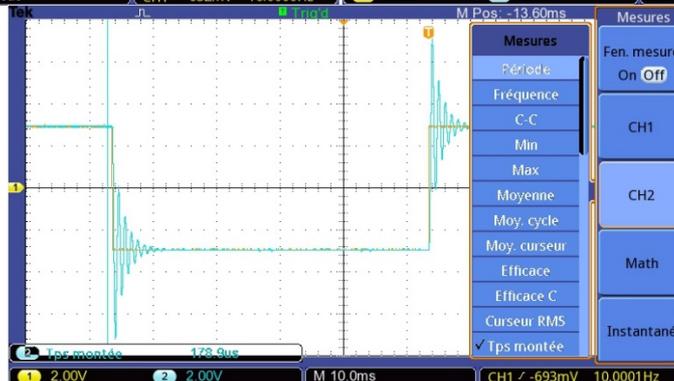
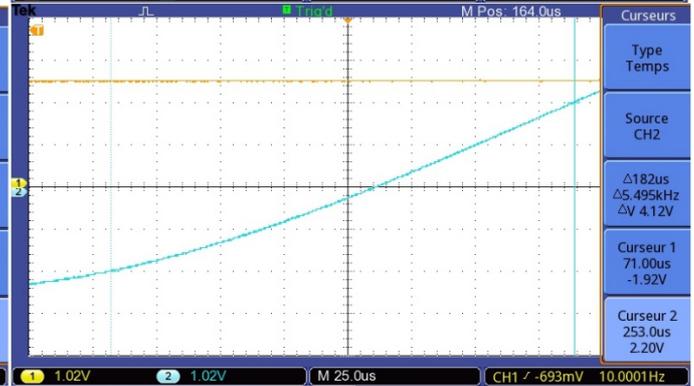
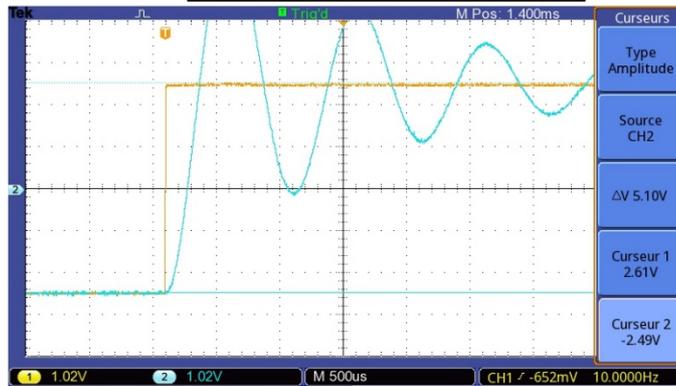
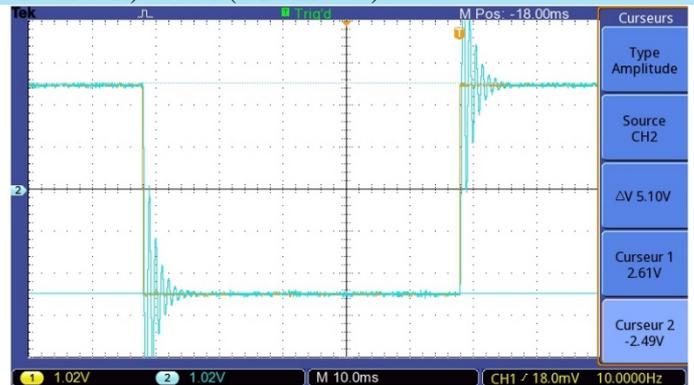
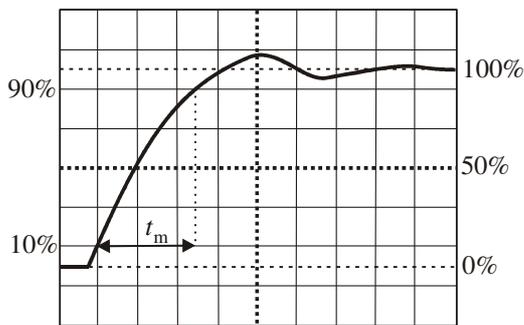


On mesure T en prenant **plusieurs pseudo-périodes** pour diminuer l'incertitude de mesure.

$$T = \frac{4,04}{4} = 1,01 \text{ ms} . \text{ On calcule } f_0 = \frac{2Q}{T\sqrt{4Q^2 - 1}} = 995 \text{ Hz} . \text{ Les sauts de curseur sont de } 0,02 \text{ ms} .$$

Une réponse indicielle est caractérisée par un temps de montée fini pour passer de la valeur « basse » (0%) à la valeur « haute » (100%). Le temps de montée est la durée nécessaire pour passer de 10% à 90% de la valeur haute.

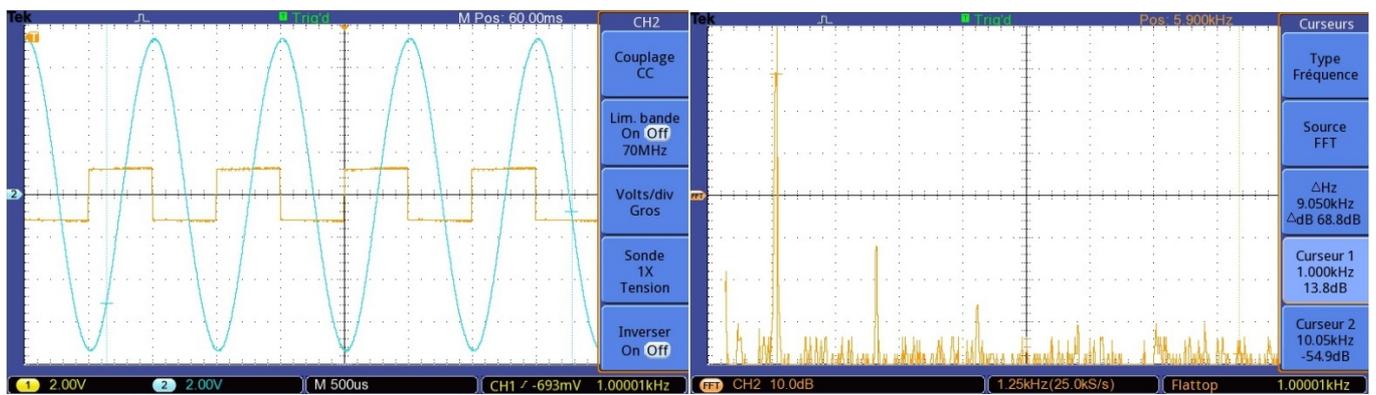
Pour le mesurer, on place les asymptotes à $-2,5$ et $2,5$ carreaux en décalibrant la déviation verticale (Volts/div : Fin). On mesure grâce aux curseurs de temps l'écart entre les passages à 10% (-2 carreaux) et 90% ($+2$ carreaux) :



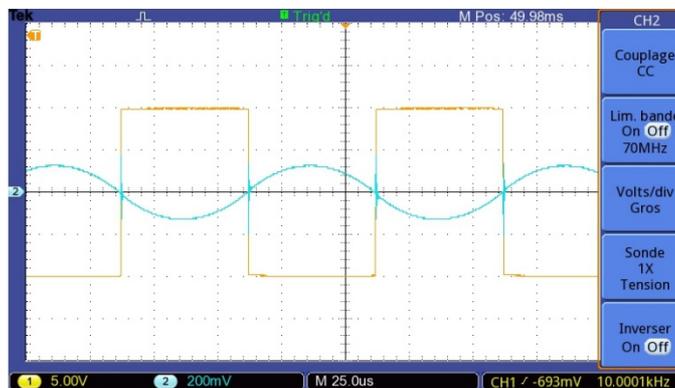
On mesure $t_m = 182 \mu\text{s}$, la valeur théorique étant $t_m = 0,175 / f_0 = 175 \mu\text{s}$. La mesure automatique de l'oscilloscope donne $t_m = 178,9 \mu\text{s}$.



À 1 Hz, on a en première approximation $V_s = V_e$ car pour les harmoniques de fréquences inférieures à 200 Hz, on a $H \approx 1$. Cependant, les harmoniques de fréquences situées autour de $f_{rés.} \approx 1000$ Hz sont amplifiés et créent des oscillations au voisinage des discontinuités de V_e . Ce sont les oscillations étudiées au 3., dont la durée est très faible devant la période de V_s .



À 1 kHz, V_s est en première approximation la réponse au fondamental de V_e , dont la fréquence est égale à la fréquence de résonance du filtre. Une analyse spectrale de V_s montre que l'harmonique de rang 3 n'est pas tout-à-fait négligeable.



À 10 kHz, V_s est encore en première approximation la réponse (faible) au fondamental de V_e , les harmoniques étant très atténués par un filtre passe-bas du second ordre. On constate la présence d'oscillations de grandes fréquences au voisinage des discontinuités, dues au comportement de l'A.L.I et non expliquées dans le cadre de notre étude théorique.

La méthode temporelle est plus rapide (l'étude fréquentielle nécessite des mesures de gain et de déphasage à plusieurs fréquences). En revanche, elle nécessite une étude théorique plus complexe pour faire apparaître les paramètres du filtre à partir des valeurs mesurées (on utilise souvent des abaques). La précision des mesures est comparable pour les deux méthodes.

Q.5) En appliquant Millman à l'entrée + et au nœud entre R_1 , R_2 et C_2 , et en écrivant $\underline{V}^- = \underline{V}_s$, on obtient :

$$H(j\omega) = \frac{V_s}{V_e} = \frac{1}{1 + j(R_1 + R_2)C_1\omega - R_1R_2C_1C_2\omega^2}, \text{ qui donne bien en identifiant } f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{R_1C_1R_2C_2}} = 995 \text{ Hz et :}$$

$$Q = \frac{\sqrt{R_1R_2}}{R_1 + R_2} \sqrt{\frac{C_2}{C_1}} = 5,0.$$

5. INCERTITUDES

Ce T.P étant riche en parties théoriques et en mesures, aucun calcul d'incertitude n'est explicitement demandé. On peut néanmoins en proposer quelques-unes pour la partie 3.

5.1 Méthode analytique

$$\text{Incertainitude sur } \Delta = \frac{D_1}{\Gamma} = 0,729$$

Les D_i et Γ sont connues avec une tolérance de 0,04 V (sauts de curseurs). On a donc $u(D_i) = u(\Gamma) = \sqrt{\frac{2}{3}} \times 0,04 = 0,0327$ V. Le

$\sqrt{2}$ vient du fait que les mesures sont faites par *différence* entre les positions de deux curseurs.

$$u(\Delta) = \Delta \sqrt{\left[\left(\frac{u(D_1)}{D_1}\right)^2 + \left(\frac{u(\Gamma)}{\Gamma}\right)^2\right]} = \Delta \cdot u(D_1) \sqrt{\frac{1}{D_1^2} + \frac{1}{\Gamma^2}} = 0,729 \times 0,0327 \times \sqrt{\frac{1}{3,72^2} + \frac{1}{5,10^2}} : u(\Delta) = 0,00792.$$

$$\text{Incertainitude sur } Q = \frac{\sqrt{\pi^2 + (\ln \Delta)^2}}{2|\ln \Delta|} = 5,00$$

C'est faisable par la méthode analytique : $Q^2 = \frac{\pi^2 + (\ln \Delta)^2}{4(\ln \Delta)^2} = \frac{1}{4} + \frac{\pi^2}{4} \frac{1}{(\ln \Delta)^2} \Rightarrow 2QdQ = -2 \frac{\pi^2}{4} \frac{1}{(\ln \Delta)^3} \frac{d\Delta}{\Delta}$. On a donc :

$$u(Q) = \frac{\pi^2}{4} \frac{1}{Q\Delta|\ln \Delta|^3} u(\Delta) = \frac{\pi^2}{4} \frac{0,00792}{5,00 \times 0,7294 \times |\ln 0,7294|^3} : u(Q) = 0,171.$$

$$\text{Incertainitude sur } f_0 = \frac{2Q}{T\sqrt{4Q^2 - 1}} = 995 \text{ Hz}$$

Pour l'incertitude-type, on pose $q = 1 - \frac{1}{4Q^2} = 0,9900 \Rightarrow dq = \frac{1}{2Q^3} dQ \Rightarrow u(q) = \frac{u(Q)}{2Q^3} = 6,82 \cdot 10^{-4}$.

On a alors $f_0 = \frac{1}{T\sqrt{q}} \Rightarrow \ln(f_0) = -\ln(T) - \frac{1}{2}\ln(q) \Rightarrow \frac{df_0}{f_0} = -\frac{dT}{T} - \frac{1}{2}\frac{dq}{q} \Rightarrow \frac{u(f_0)}{f_0} = \sqrt{\left[\frac{u(T)}{T}\right]^2 + \frac{1}{4}\left[\frac{u(q)}{q}\right]^2}$

On a mesuré $T = \frac{\tau = 4,04}{4} = 1,01$ ms avec $u(\tau) = \sqrt{\frac{2}{3}} \times 0,02 = 0,016$ ms $\Rightarrow u(T) = \frac{u(\tau)}{4} = 0,00408$ ms.

$$u(f_0) = f_0 \sqrt{\left[\frac{u(T)}{T}\right]^2 + \frac{1}{4}\left[\frac{u(q)}{q}\right]^2} = 995 \sqrt{\left[\frac{0,00408}{1,01}\right]^2 + \frac{1}{4}\left[\frac{6,82 \cdot 10^{-4}}{0,9900}\right]^2} : u(f_0) = 4,0 \text{ Hz}$$

Au vu de ces valeurs, tous les résultats sont compatibles entre eux et avec la théorie.

5.2 Méthode de Monte-Carlo

Incertainitude sur Δ

```
def f(D1, Gamma):
```

```
    return D1/Gamma
```

```
>>> propagation_monte_carlo([3.72-0.04*2**.5, 3.72+0.04*2**.5], [5.10-0.04*2**.5, 5.10+0.04*2**.5])
```

```
(0.7294371753819251, 0.007926122935472199)
```

$$\text{Incertainitude sur } Q = \frac{\sqrt{\pi^2 + (\ln \Delta)^2}}{2|\ln \Delta|}$$

```
def f(Delta):
```

```
    return -(np.pi**2+(np.log(Delta))**2)**.5/2/np.log(Delta)
```

```
>>> propagation_monte_carlo([0.7294-3**.5*0.00793, 0.729+3**.5*0.00793])
```

```
(5.0038143961505375, 0.16829849120432328)
```

$$\text{Incertainitude sur } f_0 = \frac{2Q}{T\sqrt{4Q^2 - 1}} = 995 \text{ Hz}$$

```
def f(Q, T):
```

```
    return 2*Q/T/(4*Q**2-1)**0.5
```

```
>>> propagation_monte_carlo([5.0038-3**.5*0.1683, 5.0038+3**.5*0.1683], [1.01E-3-3**.5*0.00408E-3, 1.01E-3+3**.5*0.00408E-3])
```

```
(995.1162272576396, 4.035511736178224)
```

Les incertitudes relatives étant faibles, la méthode analytique donne les bons résultats mais est lourde. Il faut être capable d'écrire rapidement un code Python pour propager les incertitudes par la méthode de Monte-Carlo, s'il n'est pas fourni.