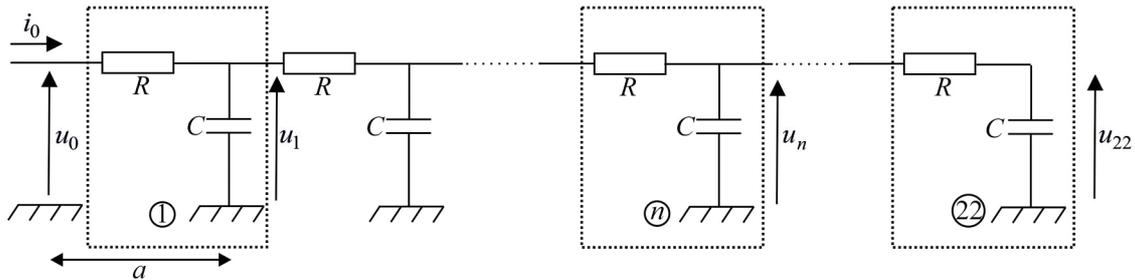


PHÉNOMÈNES DIFFUSIFS À 1D, SIMULATION À L'AIDE DE CELLULES RC



1. MONTAGE ÉTUDIÉ, ÉQUATION DE DIFFUSION



Q.1) Déterminer la relation entre u_n , u_{n+1} et u_{n-1} .

Millman :
$$\underline{u}_n = \frac{\frac{u_{n-1}}{R} + \frac{u_{n+1}}{R}}{\frac{2}{R} + jC\omega} = \frac{u_{n-1} + u_{n+1}}{2 + jRC\omega} \Leftrightarrow RC \frac{du_n}{dt} + 2u_n = u_{n-1} + u_{n+1} \quad (*)$$

Approximation des milieux continus : u varie sur des distances $\lambda \gg a$. On pose $u(x = na, t) = u_n(t)$. D'où :

$$\begin{cases} u_{n-1}(t) = u(x = na - a, t) \approx u(x = na, t) - a \frac{\partial u}{\partial x}(x = na, t) + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x = na, t) \\ u_{n+1}(t) = u(x = na + a, t) \approx u(x = na, t) + a \frac{\partial u}{\partial x}(x = na, t) + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x = na, t) \end{cases}$$

(*) s'écrit alors $RC \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Leftrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{D} \frac{\partial u}{\partial t}$ avec $D = \frac{a^2}{RC} = \frac{a^2}{\tau}$, coefficient de diffusion en $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$

2. RÉGIME STATIONNAIRE

En régime stationnaire les condensateurs sont équivalents à des interrupteurs ouverts.

L'extrémité étant court-circuitée, on a donc une structure de diviseur de tension entre u_n et la tension appliquée $u_0 = 10,000 \text{ V}$:

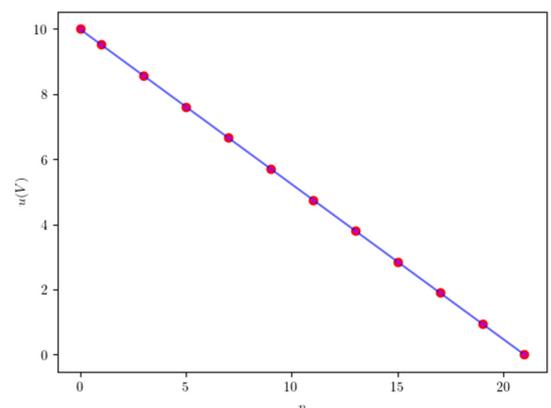
$$u_n = \frac{21-n}{21} u_0 = 10,000 - 0,476n$$

On le vérifie grâce à un ajustement linéaire $u_n = an + b$.

On trouve $a = -0,47604 \text{ V}$; $u(a) = 0,00077 \text{ V}$; et $b = 9,9946 \text{ V}$; $u(b) = 0,0093 \text{ V}$. Les Z-scores montre que la loi affine est validée.

On mesure le courant circulant dans les résistances : $I = 471,5 \mu\text{A}$. On en

déduit $R = \frac{u_0}{21I} = 1,01 \text{ k}\Omega$, proche de la valeur constructeur $R = 1,00 \text{ k}\Omega$.

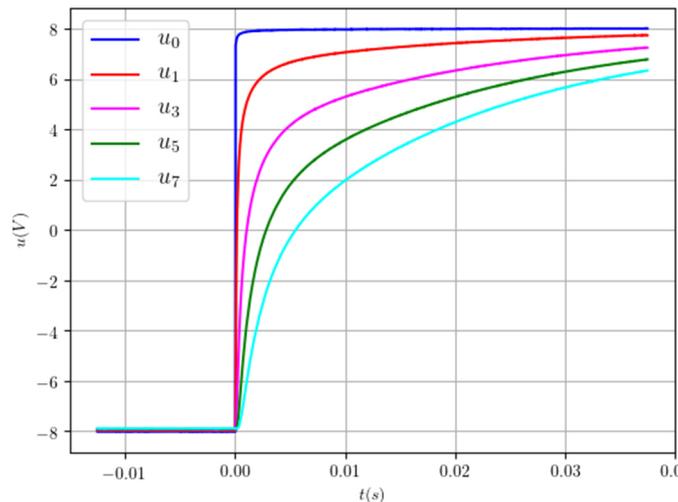


Q.2) En diffusion thermique, T est l'analogue de u . On a donc l'équation $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{D} \frac{\partial T}{\partial t}$ qui correspond à de la diffusion pure

dans une barre de longueur L et de diffusivité thermique D . En régime stationnaire l'équation devient $\frac{d^2 T}{dx^2} = 0$ et on a bien un profil affine de température, les températures étant imposées aux deux extrémités de la barre.

3. RÉPONSE À UN ÉCHELON DE TENSION

On déclenche à $t = 0$ s sur la tension u_0 lorsqu'elle passe par 0 V avec une pente croissante (on a pris 2 000 points sur 50 ms, avec un pré-trig de 25% : les signaux sont acquis entre -12,5 ms et 37,5 ms). Tous les signaux sont acquis simultanément.



Q.3) La situation analogue en diffusion thermique est l'application d'un échelon de température à l'extrémité d'une barre que l'on suppose infinie (cette fois-ci, l'extrémité de la barre n'est pas court-circuitée).

Q.4) On pose $\xi = \frac{x}{2\sqrt{Dt}}$ et $u(x,t) = f(\xi)$.

On a alors :

$$-\frac{1}{D} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{D} f'(\xi) \frac{\partial \xi}{\partial t} = -\frac{1}{D} f'(\xi) \frac{x}{4\sqrt{Dt^3}} = -\frac{1}{D} f'(\xi) \frac{2\xi\sqrt{Dt}}{4\sqrt{Dt^3}} = -\frac{1}{2Dt} \xi f'(\xi)$$

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = f'(\xi) \frac{\partial \xi}{\partial x} = f'(\xi) \frac{1}{2\sqrt{Dt}} \text{ puis } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''(\xi) \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{1}{2\sqrt{Dt}} = f''(\xi) \frac{1}{4Dt}$$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{D} \frac{\partial u}{\partial t}$ devient donc $f''(\xi) = -2\xi f'(\xi)$ qui peut s'intégrer une première fois en séparant les variables : $\frac{f''}{f'} = -2\xi$ d'où

$$\ln|f'| = -\xi^2 + Cte \Leftrightarrow f'(\xi) = K \exp(-\xi^2) \text{ soit après une nouvelle intégration } f(\xi) = K_1 \int_0^\xi \exp(-X^2) dX + K_2$$

On en déduit que la solution recherchée s'écrit sous la forme $u(x,t) = A_1 \operatorname{erf}\left[\frac{x}{2\sqrt{Dt}}\right] + A_2$

Les conditions aux limites sont $\begin{cases} u(0,t) = E_0 \\ u(\infty,t) = 0 \end{cases}$ pour $t > 0$

Les conditions initiales sont $\begin{cases} u(0,0) = E_0 \\ u_n(x,0) = 0 \end{cases}$ pour $x > 0$

Ces conditions se résument à $\begin{cases} f(0) = E_0 \\ f(\infty) = 0 \end{cases}$ ce qui entraîne $\begin{cases} f(0) = A_2 = E_0 \\ f(\infty) = A_1 + A_2 = 0 \end{cases}$

On a bien la solution $u(x,t) = E_0 \left(1 - \operatorname{erf}\left[\frac{x}{2\sqrt{Dt}}\right]\right)$ soit $u_n(t) = E_0 \left(1 - \operatorname{erf}\left[\frac{n}{2} \sqrt{\frac{\tau}{t}}\right]\right)$ avec $\tau = RC$

Pour $n \geq 1$, u_n passe de 0 (à $t = 0$) à E_0 (pour $t \rightarrow \infty$). On repère la date $t_{1/2}$ pour laquelle $u_n = \frac{E_0}{2}$, soit ici du passage par 0 puisque le signal d'entrée passe de -8 V à +8 V.

n	0	1	3	5	7
$t_{1/2}$ (μs)	0	129	1021	2794	5472

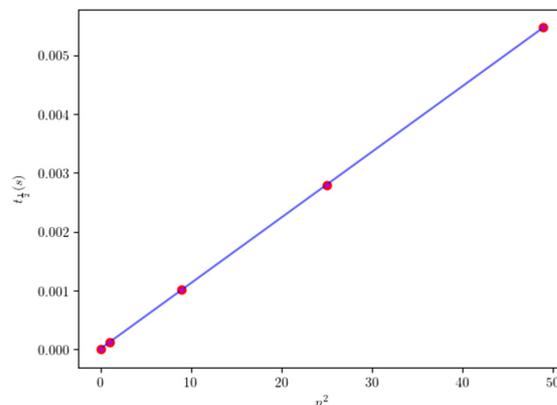
On a $\frac{n}{2} \sqrt{\frac{\tau}{t_{1/2}}} = 0,4769$ soit $t_{1/2} = \frac{\tau n^2}{4 \times (0,4769)^2} = 1,10 \tau n^2$.

Il suffit de mesurer $t_{1/2}$ pour $n \leq 7$ (l'approximation « barre infinie » n'est pas correcte lorsque n est trop grand : effets de bord), et de faire un ajustement affine de $t_{1/2}$ en fonction de n^2 .

On obtient $1,10 \tau = 111,4 \cdot 10^{-6} \Rightarrow \tau = 101,27 \mu\text{s}$, proche de la valeur théorique $\tau = RC = 100 \mu\text{s}$.

On a également $u(\tau) = 0,55 \mu\text{s}$.

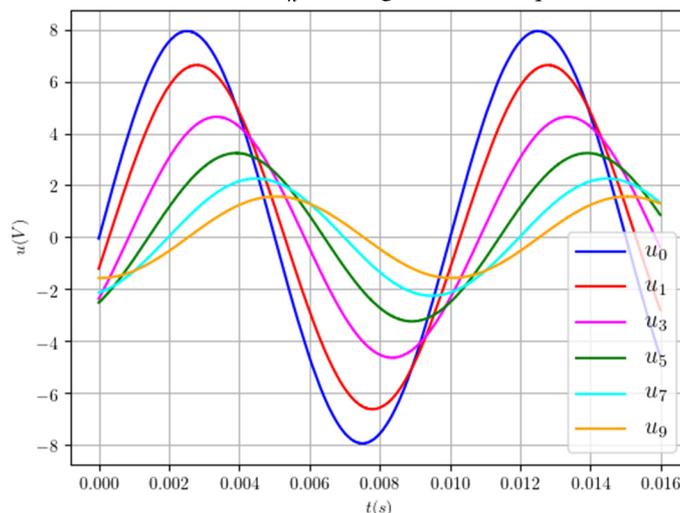
Pour l'établissement des équations, nous avons supposé que toutes les résistances étaient égales, ainsi que toutes les capacités, or il y a dispersion des valeurs des résistances et des capacités autour des valeurs indiquées par le constructeur, si bien que les résultats obtenus sont parfaitement compatibles avec les résultats théoriques.



On peut valider l'approximation « barre infinie » : si on considère la cellule « n », l'établissement du régime forcé se fait en une durée de l'ordre de $\frac{(na)^2}{D} = \tau n^2$. Le milieu peut être considéré comme infini si on a toujours $u = 0$ en bout de barre, soit pour $n = 22$. Il faut donc $\tau n^2 \ll \tau \times 22^2$. La loi en n^2 permet de faire cette approximation jusqu'à la 7^{ème} cellule (mais ça devient mauvais à partir de $n = 10$), et on voit l'intérêt de réaliser l'expérience avec un grand nombre de cellules.

4. RÉGIME SINUSOÏDAL FORCÉ

On veut cette fois-ci les déphasages entre u_n et u_0 : il faut donc déclencher sur u_0 (voie EAO, seuil à 0 V pour une tension montante) et acquérir simultanément les autres tensions u_n . Les signaux sont acquis entre 0 ms et 16 ms (2 000 points).



Q.5) L'analogie est l'étude des ondes thermiques dans un milieu semi-infini : on impose sur la surface une température sinusoïdale. L'équation étant linéaire, on obtient un régime sinusoïdal forcé : la température dans le milieu oscille sinusoïdalement à la pulsation ω imposée à la surface, mais avec un retard et avec une décroissance exponentielle de l'amplitude (effet de peau).

On peut au passage discuter de la validité de l'hypothèse « barre infinie » : on a par analyse dimensionnelle une épaisseur de peau $\delta = \sqrt{\frac{2D}{\omega}}$ en régime sinusoïdal forcé. Il faut donc :

$$\delta \ll 22a \Leftrightarrow \frac{2D}{\omega} \ll 484a^2 \Leftrightarrow RC\omega \gg \frac{2}{484} \Leftrightarrow f \gg \frac{1}{484\pi RC} = 6,6 \text{ Hz}, \text{ ce qui est correctement vérifié pour } f = 100 \text{ Hz}.$$

On cherche donc des solutions en $\underline{u} = g(x)e^{j\omega t}$ de $\frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial x^2} = \frac{1}{D} \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} = \frac{j\omega}{D} \underline{u} \Leftrightarrow g''(x) = \frac{j\omega}{D} g(x)$

Après résolution du polynôme caractéristique, élimination de la solution qui diverge pour $x \rightarrow \infty$, et prise en compte des conditions aux limites, on a :

$$g(x) = Ke^{-\frac{x}{\delta}} e^{-\frac{jx}{\delta}} \text{ et } \underline{u}(x,t) = U_0 e^{-\frac{x}{\delta}} e^{j(\omega t - \frac{x}{\delta})} \text{ d'où } \underline{u}(x,t) = U_0 e^{-\frac{x}{\delta}} \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right) \text{ et } u_n(t) = U_0 e^{-n\sqrt{\frac{\omega\tau}{2}}} \cos\left(\omega t - n\sqrt{\frac{\omega\tau}{2}}\right)$$

Il ne reste plus qu'à mesurer l'amplitude et le retard pour quelques valeurs de n et d'effectuer des ajustements affines pour avoir accès à $\sqrt{\frac{\omega\tau}{2}}$, donc à $\tau = RC$.

4.1 Étude de l'amplitude

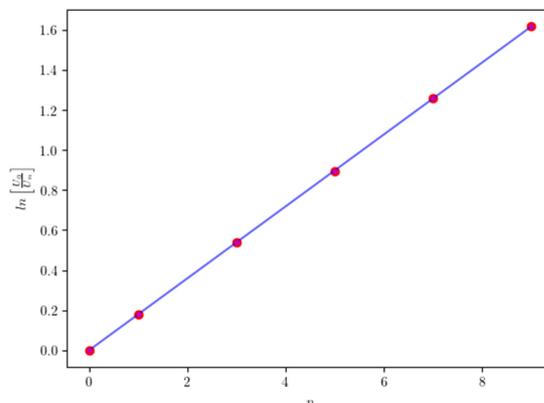
n	0	1	3	5	7	9
U Amplitude crête-à-crête (V)	15,91	13,28	9,30	6,50	4,53	3,15

On effectue la régression linéaire $X = \ln\left(\frac{U_0}{U_n}\right)$ en fonction de n

(théoriquement on a $X = n\sqrt{\pi f\tau}$).

On obtient $\sqrt{\pi f\tau} = 0,180 \Rightarrow \tau = 103 \mu\text{s}$ très proche de la valeur théorique $\tau = RC = 100 \mu\text{s}$.

Pour des valeurs $n \geq 12$ de nouveau l'approximation de la barre infinie n'est pas vérifiée

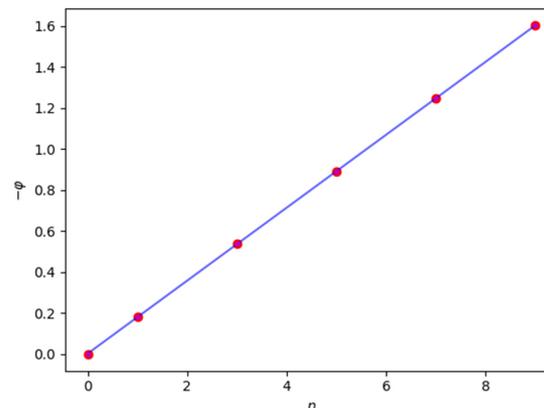


4.2 Étude du retard

n	0	1	3	5	7	9
$-\varphi$ (rad)	0	0,185	0,538	0,891	1,247	1,605

On effectue la régression linéaire $-\varphi$ en fonction de n (théoriquement on a $-\varphi = n\sqrt{\pi f\tau}$).

On obtient $\sqrt{\pi f\tau} = 0,1779 \Rightarrow \tau = 101 \mu\text{s}$ très proche de la valeur théorique $\tau = RC = 100 \mu\text{s}$.



Q.6) Les ondes étudiées ont une vitesse de phase $v_\varphi = \omega\delta = \sqrt{2D\omega} = a\sqrt{\frac{2\omega}{\tau}}$ dépendant de la pulsation : il y a dispersion (et absorption bien sûr).

On peut construire une longueur d'onde caractéristique $\lambda = v_\varphi T = 2\pi\frac{v_\varphi}{\omega} = 2\pi a\sqrt{\frac{2}{\omega\tau}}$ qui doit être très supérieure à a pour que

l'approximation des milieux continus soit valable, soit $2\pi\sqrt{\frac{2}{2\pi f\tau}} \gg 1 \Leftrightarrow f \ll \frac{4\pi}{\tau} = 130 \text{ kHz}$ ce qui est bien vérifié.