

DISPERSION ET ABSORPTION DANS UN CÂBLE COAXIAL



1. PRÉSENTATION

Q.1) La loi des mailles fournit $u(z, t) = \frac{dL}{\Lambda dz} \cdot \frac{\partial i}{\partial t} + \underbrace{u(z + dz, t)}_{u(z, t) + \frac{\partial u}{\partial z} dz}$ soit $\frac{\partial u}{\partial z} = -\Lambda \cdot \frac{\partial i}{\partial t}$ (1).

La loi des nœuds fournit $i(z, t) = \frac{dC}{\Gamma dz} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + \underbrace{i(z + dz, t)}_{i(z, t) + \frac{\partial i}{\partial z} dz}$ soit $\frac{\partial i}{\partial z} = -\Gamma \cdot \frac{\partial u}{\partial t}$ (2).

Le découplage des équations (1) et (2) permet d'aboutir pour $s = u$ ou i à l'équation de d'Alembert $\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 s}{\partial z^2}$ avec :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\Lambda \Gamma}}.$$

D'autre part, en partant de (1) on obtient dans le cas d'une O.P.P $\begin{cases} i(z, t) = F_i \left(t - \frac{z}{c} \right) \\ u(z, t) = F_u \left(t - \frac{z}{c} \right) \end{cases}$ dans le sens des z croissants :

$$-\frac{1}{c} F'_u = -\Lambda \cdot F'_i \Rightarrow u(z, t) = \Lambda c \cdot i(z, t) \text{ en rejetant les constantes d'intégration qui sont des solutions non ondulatoires.}$$

On a donc $u(z, t) = Z_c i(z, t)$ avec $Z_c = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}}$. On a de même $u(z, t) = -Z_c i(z, t)$ pour une O.P.P dans le sens des z décroissants.

Q.2) L'onde dans le câble est la somme de l'onde incidente et de l'onde réfléchi :

$$\begin{cases} i(z, t) = F_i \left(t - \frac{z}{c} \right) + G_i \left(t + \frac{z}{c} \right) \\ u(z, t) = Z_c F_i \left(t - \frac{z}{c} \right) - Z_c G_i \left(t + \frac{z}{c} \right) \end{cases}$$

La C.A.L en bout de câble $u(0, t) = R i(0, t)$ fournit $Z_c F_i(t) - Z_c G_i(t) = R [F_i(t) + G_i(t)] \Rightarrow \rho_i = \frac{G_i(t)}{F_i(t)} = \frac{Z_c - R}{R + Z_c}$, coefficient

de réflexion en intensité. Pour la tension, $\rho = \frac{u_r(0, t)}{u_i(0, t)} = \frac{-Z_c G_i(t)}{Z_c F_i(t)} = -\rho_i = \frac{R - Z_c}{R + Z_c}$.

2. PROPAGATION D'IMPULSIONS DE TENSION

2.1 Signal envoyé

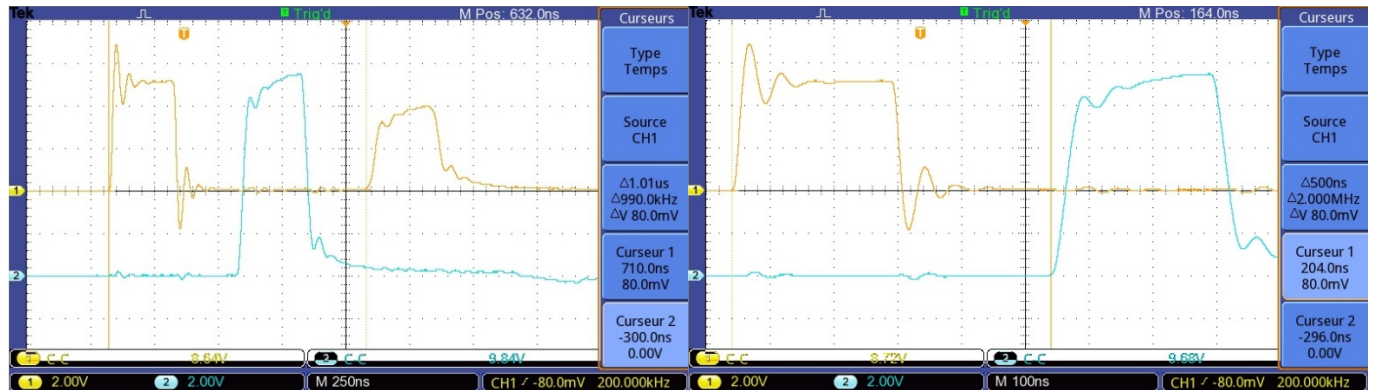
Q.3) La durée de l'aller-retour de l'impulsion dans le câble est $\Delta t = \frac{2L}{c} = 1 \mu s$. La période des impulsions doit donc vérifier $T > \Delta t$ pour que l'impulsion réfléchi revienne avant qu'une nouvelle impulsion soit émise. La fréquence des impulsions doit donc être inférieure à 1 MHz.

C'est largement vérifié pour $f = 200 \text{ kHz}$. Cette fréquence reste suffisamment petite pour que les harmoniques de l'impulsion correspondent au mode étudié (à des fréquences plus grandes, d'autres modes apparaissent).

2.2 Ligne à sortie ouverte

Pour $R \rightarrow \infty$, on a un nœud d'intensité en bout de câble et donc un ventre de tension (voie 2 : impulsion approximativement 2 fois plus grande que l'impulsion incidente visualisée en voie 1)

Le coefficient de réflexion en tension vaut 1 et on constate sur l'oscillogramme de gauche que l'impulsion réfléchie est bien dans le même sens que l'impulsion incidente.



En revanche, l'impulsion s'est déformée en se propageant. À ce stade on peut penser à de la dispersion même si la largeur d'impulsion ne semble pas affectée, et/ou à de l'atténuation dépendant de la fréquence.

On diminue l'incertitude sur la durée de propagation en mesurant le retard entre l'onde en sortie de câble et celle en entrée de câble et en zoomant au maximum (100 ns par division : oscillogramme de droite). On obtient ainsi un retard $\Delta t = \frac{L}{c} = 504 \text{ ns}$.

Un saut de curseur temporel est de 4 ns, or on obtient Δt par différence, donc $u(\Delta t) = 4\sqrt{\frac{2}{3}} = 3,27 \text{ ns}$.

On en déduit la mesure de c et son incertitude-type : $c = \frac{L}{\Delta t} = \frac{100}{504 \cdot 10^{-9}} : c = 1,984 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

$$u(c) = c \sqrt{\left(\frac{u(\Delta t)}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{u(L)}{L}\right)^2} = 1,984 \cdot 10^8 \sqrt{\left(\frac{3,27}{504}\right)^2 + \left(\frac{0,90}{100}\right)^2} : u(c) = 2,2 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

2.3 Ligne à sortie court-circuitée

Avec un court-circuit en bout de câble ($R = 0$), on a un nœud de tension (voie 2) et donc un coefficient de réflexion de $\rho = -1$.

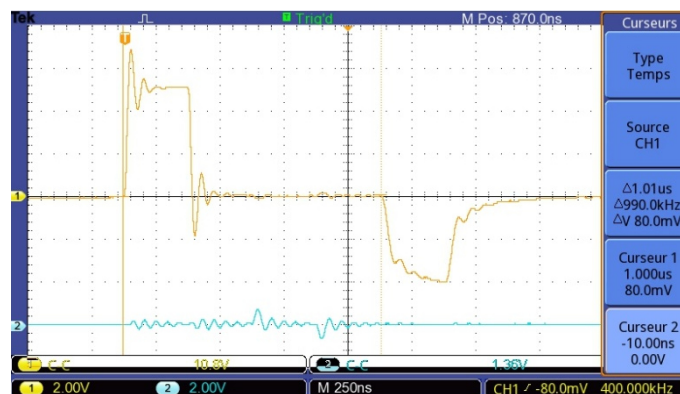
L'impulsion réfléchie est bien dans le sens opposé à celui de l'impulsion incidente.

On ne peut pas exploiter le retard entre le signal en sortie de câble et celui en entrée puisque le premier est nul (ou quasiment : en bleu figure suivante). On doit alors dézoomer un peu (250 ns par division) et l'incertitude est un peu plus grande (on a un saut de curseur de 10 ns).

On obtient ainsi un retard $\Delta t = \frac{2L}{c} = 1010 \text{ ns}$, avec $u(\Delta t) = 10\sqrt{\frac{2}{3}} = 8,16 \text{ ns}$.

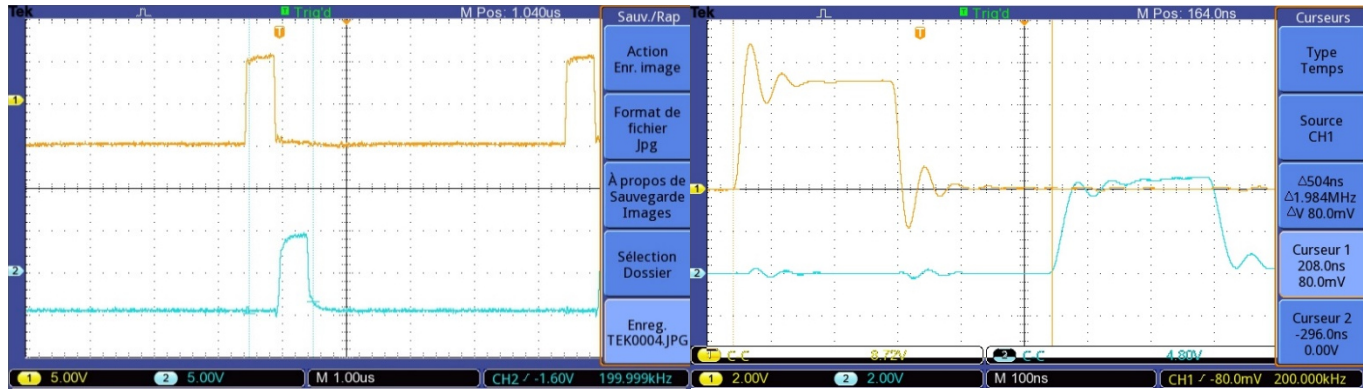
On en déduit la mesure de c et son incertitude-type : $c = \frac{2L}{\Delta t} = \frac{200}{1010 \cdot 10^{-9}} : c = 1,980 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

$$u(c) = c \sqrt{\left(\frac{u(\Delta t)}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{u(L)}{L}\right)^2} = 1,980 \cdot 10^8 \sqrt{\left(\frac{8,16}{1010}\right)^2 + \left(\frac{0,90}{100}\right)^2} : u(c) = 2,4 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$



2.4 Ligne adaptée en sortie

Avec à l'extrémité du câble un conducteur ohmique de résistance $R = 50 \Omega$, il y a adaptation d'impédance : pas d'onde réfléchie (voie 1, oscillogramme de gauche), on a une onde progressive dans le sens des z croissants.



On retrouve le retard $\Delta t = \frac{L}{c} = 504 \text{ ns}$ entre la sortie et l'entrée du câble (oscillogramme de droite) :

$$c = 1,984 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \text{ et } u(c) = 2,2 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

3. DISPERSION ET ABSORPTION DES O.P.P.H DANS LE CÂBLE

>>> Pour obtenir une O.P.P.H, on envoie un signal sinusoïdal, et on prend comme résistance de charge $R = Z_c = 50 \Omega$ (sinon, on aurait aussi une onde réfléchie).

>>> On observe la tension de sortie en fonction de celle d'entrée (mode XY). Lorsque les signaux sont en opposition de phase, l'ellipse devient une droite de pente négative. Ce protocole permet d'obtenir une faible incertitude-type sur les fréquences f_n .

n	1	3	5	7	9	11	13	15
f_n (kHz)	933	2851	4783	6717	8652	10592	12526	14425
V_{scc} (V)	7,92	6,96	6,56	6,32	6,24	6,32	6,48	6,6
V_{ecc} (V)	9,04	9,04	9,36	9,76	10,1	11,1	11,9	13,2

>>> On obtient $\Delta f_{15} = 10 \text{ kHz}$ et on déduit l'incertitude-type $u(f_{15}) = \frac{10}{\sqrt{3}} \text{ kHz}$.

Pour $n = 15$, on mesure à l'oscilloscope $V_{\text{scc}} = 6,60 \text{ V}$ et $V_{\text{ecc}} = 13,2 \text{ V}$, les tolérances respectives de $\pm 0,08 \text{ V}$ et $\pm 0,04 \text{ V}$ correspondant à des sauts de curseur. On a $G = 0,5000$.

Les mesures crête-à-crête étant faites par différence entre deux valeurs de tension, on a $u(V_{\text{ecc}}) = 0,04 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = 0,033 \text{ V}$, et

$$u(V_{\text{scc}}) = 0,08 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = 0,065 \text{ V}$$

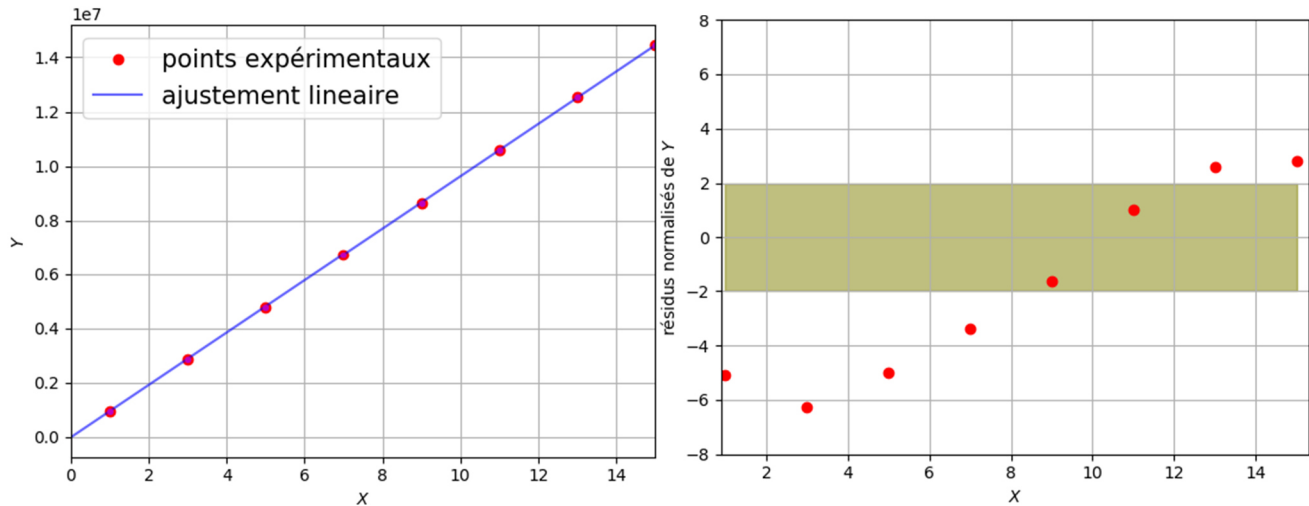
$$\text{On en déduit celle sur } G : u(G) = G \cdot \sqrt{\left(\frac{u(V_{\text{ecc}})}{V_{\text{ecc}}}\right)^2 + \left(\frac{u(V_{\text{scc}})}{V_{\text{scc}}}\right)^2} = 0,500 \times \sqrt{\left(\frac{0,033}{13,2}\right)^2 + \left(\frac{0,065}{6,6}\right)^2} = 0,0051.$$

Q.4) On étudie le retard entre la sortie et l'entrée : $\varphi = -kL = -\frac{2\pi f}{c}L$, où c est la vitesse de phase de l'onde. Les fréquences f_n

telles que $\varphi = -n\pi$ valent donc $f_n = \frac{nc_n}{2L}$.

Si $c_n = c = \text{cte}$, on a $f_n = \frac{nc}{2L} \propto n$.

>>> Le tracé de $Y = f_n$ en fonction de $X = n$ ne permet pas de distinguer un phénomène de dispersion. En revanche, l'examen des Z-scores montre qu'ils sont trop grands pour valider la loi linéaire, et qu'ils ne sont pas aléatoirement répartis : **il y a bien un phénomène de dispersion dans le câble.**



Q.5) Considérons une O.P.P.H se propageant dans le sens des z croissants. La puissance transférée dans le sens des z croissants vaut $p(z,t) = Z_c \cdot i^2(z,t) = \frac{u^2(z,t)}{Z_c} = \frac{U^2(z) \cos^2(\omega t)}{Z_c} \Rightarrow P(z) = \langle p(z,t) \rangle = \frac{U^2(z)}{2Z_c}$

Le bilan de puissance moyenne sur la tranche $[z, z+dz]$ du câble fournit $P(z) = P(z+dz) + dP_a \Rightarrow -dP = dP_a = \alpha P(z) dz$ qui s'intègre en $P(z) = P(0)e^{-\alpha z}$ et donc $U(z) = U(0)e^{-\frac{\alpha z}{2}}$. Comme on a $G = \frac{U(L)}{U(0)} = e^{-\frac{\alpha L}{2}}$, on en déduit $\alpha = -\frac{2 \ln(G)}{L}$.

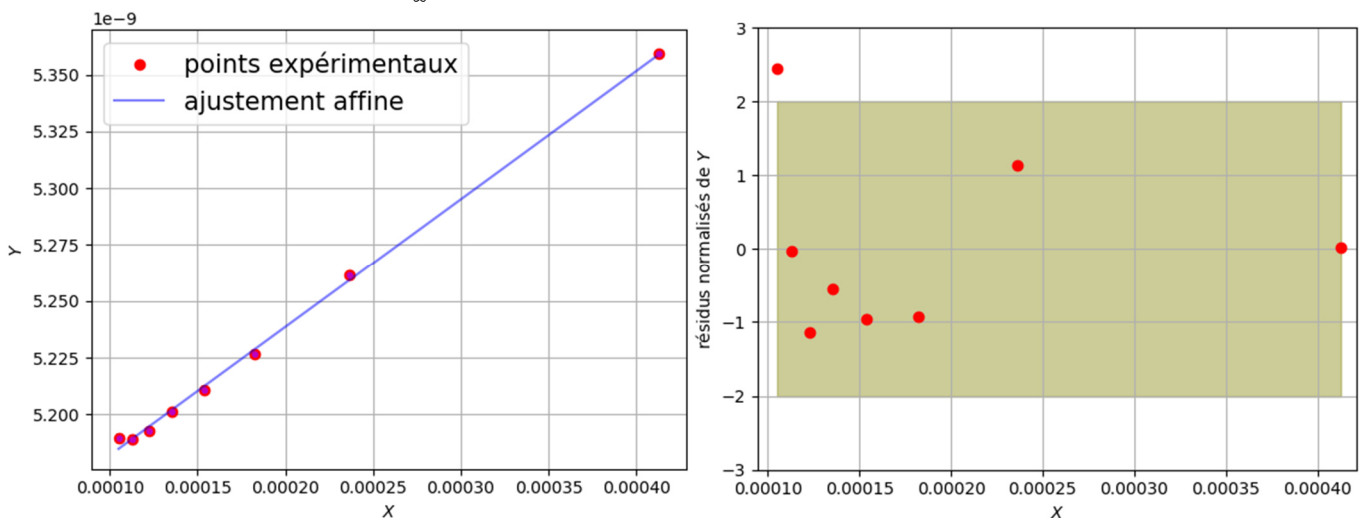
Q.6) C'est l'effet de peau dans les conducteurs qui est responsable de l'absorption de l'onde.

Q.7) On a $c(\omega) = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\frac{\omega}{c_\infty} + A\sqrt{\omega}} = \frac{1}{\frac{1}{c_\infty} + \frac{A}{\sqrt{\omega}}}$. On a bien $c(\omega) \rightarrow c_\infty$ pour $\omega \rightarrow \infty$.

On pose $X = \frac{1}{\sqrt{\omega}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi f}}$, et $Y = \frac{1}{c}$. On a alors théoriquement $Y = \frac{1}{c_\infty} + AX = AX + B$.

Comme $Y = \frac{1}{c_n} = \frac{n}{2L} \frac{1}{f_n} \Rightarrow \frac{u(Y)}{Y} = \frac{u(f_n)}{f_n}$. On a également $\frac{u(X)}{X} = \frac{1}{2} \frac{u(f_n)}{f_n}$.

>>> On effectue l'ajustement affine à l'aide du programme Python fourni, et on trouve $A = 5,654 \cdot 10^{-7} \text{ m}^{-1} \cdot \text{s}^{1/2}$, avec $u(A) = 0,071 \cdot 10^{-7} \text{ m}^{-1} \cdot \text{s}^{1/2}$, et $B = \frac{1}{c_\infty} = 5,1255 \cdot 10^{-9} \text{ m}^{-1} \cdot \text{s}$ avec $u(B) = 0,0015 \cdot 10^{-9} \text{ m}^{-1} \cdot \text{s}$.

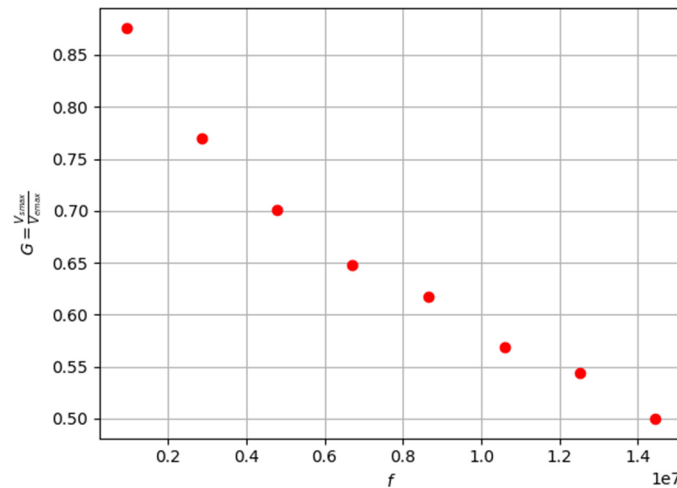


La théorie est validée.

On en déduit $c_\infty = 1,95103 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ avec $c_\infty = 0,00056 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

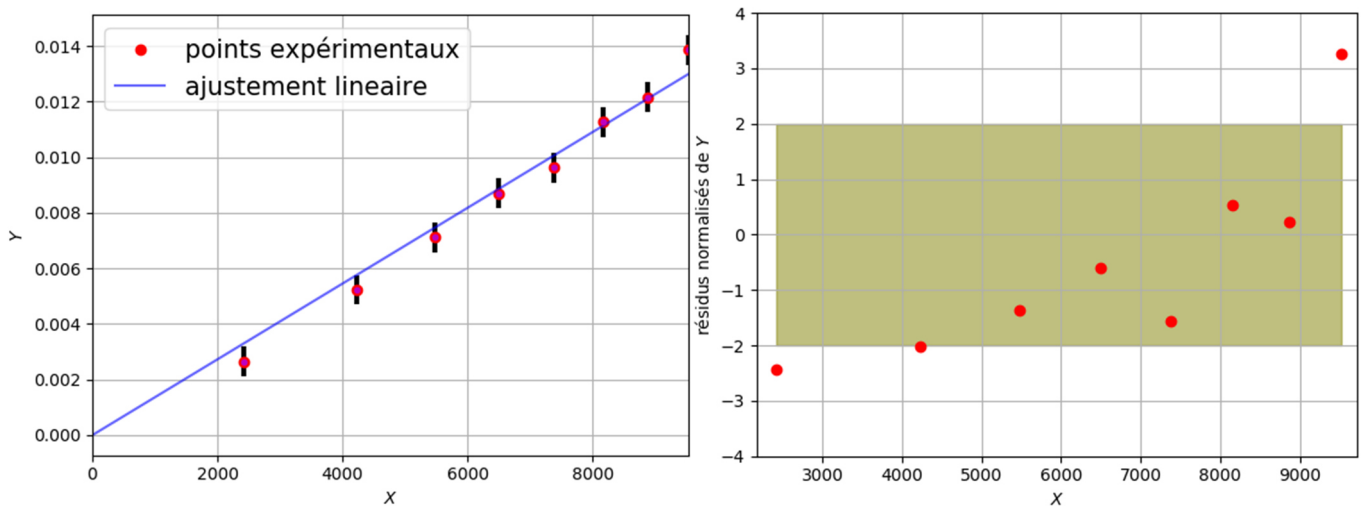
On remarque que $u(Y) \gg A \cdot u(X)$, ce qui valide le fait que l'on ne prenne pas en compte l'incertitude-type sur les abscisses.

>>> On étudie maintenant l'absorption. Traçons d'abord le gain en fonction de la fréquence. On constate que c'est une fonction décroissante :



>>> On pose $X = 2\sqrt{\omega} = 2\sqrt{2\pi f}$ et $Y = \alpha$. $\alpha = -\frac{2\ln(G)}{L} \Rightarrow d\alpha = -\frac{2}{L} \frac{dG}{G}$, d'où $u(\alpha) = \frac{2}{L} \frac{u(G)}{G}$.

>>> On utilise l'ajustement linéaire du programme Python fourni :



La théorie est validée et on trouve $A = 6,816 \cdot 10^{-7} \text{ m}^{-1} \cdot \text{s}^{1/2}$, avec $u(A) = 0,068 \cdot 10^{-7} \text{ m}^{-1} \cdot \text{s}^{1/2}$.

>>> Les deux valeurs obtenues pour A sont néanmoins incompatibles. On peut penser que c'est l'hypothèse câble accordé à toutes les fréquences qui est à remettre en cause. En effet, l'impédance caractéristique du câble dépend en réalité de la fréquence.

L'onde dans le câble n'est plus une O.P.P.H à grande fréquence, ce qui décale les valeurs des f_n .

>>> On obtient $G_{\text{dB}} = 20 \log(e^{-\frac{\alpha L}{2}}) = -\frac{10}{\ln(10)} \alpha L = -\frac{10}{\ln(10)} L \cdot A \cdot \sqrt{2\pi f} = -\frac{10}{\ln(10)} \times 100 \times 13,63 \cdot 10^{-7} \times \sqrt{2\pi \cdot 10000} = -4,7 \text{ dB}$, en accord avec la perte de 4,5 dB par 100 m de câble à 10 MHz indiquée par le constructeur.

Remarque : on peut donner un modèle simple pour l'atténuation, basé sur les résultats du cours pour l'effet de peau dans un métal : l'onde pénètre dans l'âme et la tresse sur une profondeur typique $\delta_{\text{métal}} = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$ très faible. On a assimilé les courants

dus à cette onde à des courant surfaciques $\vec{J}_{\mathcal{S}_a}$ et $\vec{J}_{\mathcal{S}_b}$: on les remplace par des distributions volumiques $\vec{J}_a$ et $\vec{J}_b$ telles que :

$$J_{\mathcal{S}_a} \cdot 2\pi a = J_a \cdot 2\pi a \cdot \delta_{\text{métal}} \Rightarrow J_a = \frac{J_{\mathcal{S}_a}}{\delta_{\text{métal}}}, \text{ et de même } J_b = \frac{J_{\mathcal{S}_b}}{\delta_{\text{métal}}}.$$

L'onde dans l'âme dissipe une puissance volumique moyenne $\gamma \langle E_a^2 \rangle = \frac{\langle J_a^2 \rangle}{\gamma} = \frac{\langle J_{\mathcal{S}_a}^2 \rangle}{\gamma \delta_{\text{métal}}^2}$, avec $\vec{J}_{\mathcal{S}_a}(z, t) = \frac{E_0}{\mu_0 c} \cos(\omega t - kz) \vec{e}_z$

soit pour une longueur dz d'armatures, une puissance moyenne absorbée :

$$dP_a^{(a)} = \frac{E_0^2}{2\mu_0^2 c^2 \gamma \delta_{\text{métal}}^2} 2\pi a \delta_{\text{métal}} dz = \frac{\pi a E_0^2}{\mu_0^2 c^2 \gamma \delta_{\text{métal}}} dz.$$

De même pour la tresse :

$$dP_a^{(b)} = \frac{E_0^2}{2\mu_0^2 c^2 \gamma \delta_{\text{métal}}^2} \frac{a^2}{b^2} 2\pi b \delta_{\text{métal}} dz = \frac{\pi a^2 E_0^2}{\mu_0^2 c^2 \gamma b \delta_{\text{métal}}} dz.$$

$$\text{Finalement } dP_a = \frac{E_0^2}{2\mu_0^2 c^2 \gamma \delta_{\text{métal}}^2} \frac{a^2}{b^2} 2\pi b \delta_{\text{métal}} dz = \frac{\pi a E_0^2}{\mu_0^2 c^2 \gamma \delta_{\text{métal}}} \left(1 + \frac{a}{b}\right) dz$$

La puissance moyenne entrante à la cote z est égale au flux du vecteur de Poynting dans le vide à travers la surface $\pi(b^2 - a^2)$.

Avec $\vec{E} = E_0 \frac{a}{r} \cos(\omega t - kz) \vec{e}_r$ et $\vec{B} = \frac{E_0}{c} \frac{a}{r} \cos(\omega t - kz) \vec{e}_\theta$ on obtient $\langle \vec{S}_p \rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} \frac{a^2}{r^2} \vec{e}_z$ et donc $P(z) = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} \int_{r=a}^b \frac{a^2}{r^2} 2\pi r dr$,

soit $P(z) = \frac{\pi E_0^2(z) a^2}{\mu_0 c} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$ avec $E_0^2(z)$ puisque le champ décroît lors de la propagation.

$$\text{On obtient } \delta = \frac{P(z)}{dP_a} dz = \frac{\frac{\pi E_0^2(z) a^2}{\mu_0 c} \ln\left(\frac{b}{a}\right)}{\frac{\pi a E_0^2(z)}{\mu_0^2 c^2 \gamma \delta_{\text{métal}}^2} \left(1 + \frac{a}{b}\right)} = \frac{\mu_0 c \gamma a b \ln\left(\frac{b}{a}\right)}{a + b} \delta_{\text{métal}} \propto \delta_{\text{métal}} \propto \frac{1}{\sqrt{\omega}}.$$