

Corrigé TD8 : probabilités

Exercice 6 (Mines-Télécom PSI 2023)

Un pion se déplace sur une droite : il se déplace d'un cran vers la droite avec la probabilité $p \in]0, 1[$ et vers la gauche avec la probabilité $1 - p$. À l'instant initial, il est à l'origine du repère et on note X_n sa position après n déplacements.

1. Que vaut $X_n(\Omega)$?
2. On note D_n le nombre de déplacements vers la droite au cours des n premiers instants. Relier X_n à D_n .
3. Déterminer les lois de D_n et X_n .
4. Calculer l'espérance de X_n .

1. $X_n(\Omega) \subset \llbracket -n, n \rrbracket$
2. Si on a D_n déplacements vers la droite alors on en a $n - D_n$ vers la gauche et $X_n = D_n - (n - D_n) = 2D_n - n$.
3. D_n compte le nombre de succès (« vers la droite ») dans une répétition indépendante de n expériences de Bernoulli de paramètre p donc $D_n \sim \mathcal{B}(n, p)$.

On en déduit, pour $n = 2k$ et $h \in \llbracket -k, k \rrbracket$, $(X_{2k} = 2h) = (D_n = h+k)$ donc $P(X_{2k} = 2h) = \binom{2k}{k+h} p^{k+h} (1-p)^{k-h}$; l'événement $(X_{2k} = 2h + 1)$ est impossible. De même, si $n = 2k + 1$ et $h \in \llbracket -k, k \rrbracket$, $P(X_{2k+1} = 2h + 1) = \binom{2k+1}{k+h+1} p^{k+h+1} (1-p)^{k-h}$.

4. Par linéarité de l'espérance, on a $E(X_n) = E(2D_n - n) = 2E(D_n) - n = 2np - n$. La question n'est pas posée mais on a aussi $V(X_n) = 4V(D_n) = 4 \times 2np(1-p)$

Exercice 7 (Mines-Ponts PSI 2023)

Soit $(X_k)_{k \geq 1}$ une suite de variables aléatoires discrètes indépendantes suivant $\mathcal{B}\left(\frac{2}{3}\right)$. On définit les événements $A_k =$

$(X_{2k-1}X_{2k} = 0)$, $B_p = \bigcap_{k=1}^p A_k$ et la variable aléatoire discrète $T = \min\{k \geq 2, X_{k-1} = X_k = 1\}$

1. Montrer que $P\left(\overline{\bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k}\right) = 1$ et en déduire $P(T \in \mathbb{N}) = 1$
2. Trouver une relation de récurrence vérifiée par la suite $(P(T = n))_{n \in \mathbb{N}}$.
3. Déterminer l'espérance de T .

1. On a $P\left(\overline{\bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k}\right) = 1 - P\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k\right)$. Par continuité décroissante $P\left(\bigcap_{k \geq 1} A_k\right) = \lim_{p \rightarrow +\infty} P(B_p)$; par coalitions,

les A_k sont indép donc $P(B_p) = \prod_{k=1}^p P(A_k)$ et $P(A_k) = P((X_{2k-1} = 0) \cup (X_{2k} = 0)) = P(X_{2k-1} = 0) + P(X_{2k} =$

$$0) - P(X_{2k-1} = X_{2k} = 0) = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}. \text{ Donc } P(B_p) = \left(\frac{8}{9}\right)^p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0.$$

$\overline{\bigcap_{k \geq 1} A_k} = \bigcup_{k \geq 1} (X_{2k-1} = X_{2k} = 1) \subset \bigcap_{j \geq 1} (X_j = X_{j+1} = 1) = (T \in \mathbb{N})$ donc $P(T \in \mathbb{N}) \geq P\left(\overline{\bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k}\right) = 1$ ce qui donne $P(T \in \mathbb{N}) = 1$

2. $((X_1 = 0), (X_1 = 1))$ est une SCE car $X_1(\Omega) = \{0, 1\}$ donc $P(T = n+1) = P(T = n+1 | X_1 = 0)P(X_1 = 0) + P(T = n+1 | X_1 = 1)P(X_1 = 1) = P(T = n) \frac{1}{3} + P(T = n-1) \frac{1}{3} \frac{2}{3}$ car si $(X_1 = 0)$ et $(T = n+1)$ (avec $n \geq 3$) alors $(X_2 = 0)$. De plus $P(T = 2) = \frac{4}{9}$ et $P(T = 3) = \frac{4}{27}$

3. T est à valeurs dans $\mathbb{N}$ (presque sûrement) donc $E(T)$ existe dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ et on a $E(T) = \sum_{n \geq 2} nP(T = n) =$

$$2P(T = 2) + 3P(T = 3) + \sum_{n \geq 3} (n+1)P(T = n+1) = \frac{8}{9} + \frac{4}{9} + \sum_{n \geq 3} (n+1) \left[\frac{1}{3}P(T = n) + \frac{2}{9}P(T = n-1) \right] =$$

$\frac{4}{3} + \frac{1}{3}(E(T) - 2P(T = 2) + 1 - P(T = 2)) + \frac{2}{9}(E(T) + 2) \dots$ De cette relation, on détermine la valeur de $E(T)$: c'est une équation de la forme $\alpha E(T) = \beta$