Oral TD9 : calcul différentiel et géométrie

Exercice 1 **(Mines-Télécom PSI 2024)**

1. Donner les solutions polynômiales de $(x^2-1)y''(x)+2xy'-2y=0$.
2. On pose $y(x)=xz(x)$; trouver une équation différentielle vérifiée par z
3. Déterminer a,b,c tels que $\dfrac{2-4x^2}{x(x^2-1)}=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x-1}+\dfrac{c}{x+1}$; en déduire z puis résoudre l'équation initiale sur $]-1,1[$.

Exercice 2 **(Mines-Ponts PSI 2022)**
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, α et β deux fonctions réelles dérivables sur I. On définit le wronskien $w : I \to \mathbb{R}$ de (α,β) par $\forall t\in I, w(t)=\begin{vmatrix}\alpha(t) & \beta(t)\\ \alpha'(t) & \beta'(t)\end{vmatrix}$

1. Montrer que si φ et ψ sont deux solutions de $(E) : y''=ay'+by$ avec $a,b : I\to\mathbb{R}$ continues alors le wronskien w de (φ,ψ) vérifie une équation différentielle d'ordre 1.
2. Si φ ne s'annule pas sur I, calculer $\left(\dfrac{\psi}{\varphi}\right)'$ en fonction de w et φ.
3. Trouver une solution développable en série entière de $(E) : 2xy''+y'-y=0$ telle que $\varphi(0)=1$.
4. En déduire les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 **(CCINP PSI 2022)**
Soit $g\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ telle que $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2, \partial_1 g(x,y)+\partial_2 g(x,y)=0$. On pose $h(u,v)=f(\alpha u+\beta v,\beta u-\alpha v)$ avec $(\alpha,\beta)\neq(0,0)$.

1. Calculer $\partial_1 h(u,v)$
2. Trouver (α,β) tels que $h(u,v)=\varphi(v)$ avec $\varphi\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$
3. Déterminer g

Exercice 4 **(CCINP PSI 2023)**

Soient $F=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, x+y=0\}$ et $f : (x,y)\longmapsto\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x+y} & \text{si } (x,y)\notin F\\ 0 & \text{si } (x,y)\in F\end{cases}$

1. Justifier que $f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2\setminus F)$
2. Montrer que, si $(x,y)\notin F$, $x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=3f(x,y)$
3. Existence et valeurs de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$?
4. f est-elle continue en $(0,0)$?

Exercice 5 **(Mines-Ponts PSI 2023)**

Soit $f(x,y)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{1+y^{2n}}$

1. Déterminer le domaine de définition D de f et le représenter. *(*)*
2. Étudier l'existence des dérivées partielles de f. *(*)*

Exercice 6 **(Centrale PSI 2024)**
Soient $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, x^2+2y^2=8\}$ et $\phi : t\mapsto(2\sqrt{2}\cos(t),2\sin(t))$.

1. Montrer que ϕ réalise une bijection de $[0,2\pi[$ sur E. *(*)*
2. Soient $\Delta=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, x^2+2y^2\leqslant 8\}$ et $f:(x,y)\mapsto\sqrt{1+x^2+y^2}+x^2$.
   a) Justifier que f admet sur Δ un maximum et un minimum.
   b) Étudier les extremum de f sur $\overset{o}{\Delta}$
   c) Déterminer le maximum et le minimum de f sur Δ

Exercice 7 **(Centrale PSI 2022)**
Soit $K:[0,1]^2\to\mathbb{R}$ telle que $K(x,y)=x(1-y)$ si $x\leqslant y$ et $K(x,y)=y(1-x)$ sinon

1. Montrer que K est continue sur $[0,1]^2$ et à valeurs dans $\left[0,\dfrac{1}{4}\right]$
2. Pour $0<x_0<y_0<1$, donner l'équation du plan tangent à la surface d'équation $z=K(x,y)$ au point $M_0=(x_0,y_0,K(x_0,y_0))$

Indications

Exercice 5

1. *Distinguer* $|x| < |y|$ *et* $|x| \geqslant |y|$
2. *Ce sont des séries de fonctions par rapport à* x *quand* y *est fixé et inversement.*

Exercice 6

1. *Pour la surjectivité, c'est comme trouver l'argument d'un complexe.*