Corrigé TD9 : calcul différentiel et géométrie

Exercice 6 **(Centrale PSI 2024)**
Soient $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2+2y^2=8\}$ et $\phi : t \mapsto (2\sqrt{2}\cos(t), 2\sin(t))$.

1. Montrer que ϕ réalise une bijection de $[0,2\pi[$ sur E.

2. Soient $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2+2y^2 \leqslant 8\}$ et $f : (x,y) \mapsto \sqrt{1+x^2+y^2}+x^2$.

a) Justifier que f admet sur Δ un maximum et un minimum.

b) Étudier les extremum de f sur $\overset{o}{\Delta}$

c) Déterminer le maximum et le minimum de f sur Δ

---

1. $[2\sqrt{2}\cos(t)]^2 + 2[2\sin(t)]^2 = 8$ donc $\phi([0,2\pi|) \subset E$ et si $(x,y) \in E$, on a $\left|\dfrac{x}{2\sqrt{2}} + i\dfrac{y}{2}\right|^2 = 1$ donc il suffit de prendre $t \in [0,2\pi[$, un argument du complexe $\dfrac{x}{2\sqrt{2}} + i\dfrac{y}{2}$, pour avoir $\phi(t) = (x,y)$ et $\phi([0,2\pi[) = E$ donc ϕ est surjective.
De plus, ϕ est injective car si $\phi(t) = \phi(t')$ alors $\cos(t) = \cos(t')$ et $\sin(t) = \sin(t')$, avec $t, t \in [0,2\pi[$, donc $t = t'$.

2. a) Si $(x,y) \in \Delta$ alors $x^2 \leqslant 8$ et $y^2 \leqslant 4$ donc $\Delta \subset [-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}] \times [-2,2]$ est donc borné. De plus $h : (x,y) \mapsto 8-x^2-2y^2$ est polynômiale donc continue sur $\mathbb{R}^2$; comme $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, h(x,y) \geqslant 0\}$, h est une partie fermée de $\mathbb{R}^2$.
f est continue sur Δ (car $1+x^2+y^2 \geqslant 1$ et $t \mapsto \sqrt{t}$ est continue sur $[1,+\infty[$) fermé borné non vide dans $\mathbb{R}^2$, qui est de dimension finie, donc le théorème des bornes atteintes assure que f admet sur Δ un maximum et un minimum.

b) f est $\mathcal{C}^1$ sur $\overset{o}{\Delta}$ qui est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, espace de dimension finie, donc si f admet un extremum en (x,y) alors (x,y) est un point critique de f. On vérifie que le système $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$ admet pour seule solution $(x,y) = (0,0)$ donc $(0,0)$ est le seul point critique dans $\overset{o}{\Delta}$; $f(0,0) = 1 \leqslant f(x,y)$ donc le minimum de f sur $\overset{o}{\Delta}$ est $1 = f(0,0)$ (et f n'a aucun maximum local sur $\overset{o}{\Delta}$)

c) On a toujours $f \geqslant 1$ sur Δ donc $\min\limits_{\Delta} f = f(0,0) = 1$. Par contre $M = \max\limits_{\Delta} f$ est atteint en un point du bord de Δ, qui est exactement le domaine E. Ce maximum est donc atteint en un point $(x,y) \in E$, que l'on peut donc, par surjectivité de ϕ, écrire $(x,y) = \phi(t)$. On étudie donc $g(t) = f \circ \phi(t) = \sqrt{5+4\cos^2 t} + 8\cos^2 t$ (qui décrit les valeurs prises par f sur $\phi([0,2\pi[) = \phi(E)$ donc sur le bord de Δ) qui est maximale en $t = 0$ (c'est-à-dire lorsque $\cos^2(=1)$ donc $M = f(2\sqrt{2}, 0) = 11$.

Exercice 7 **(Centrale PSI 2022)**
Soit $K : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ telle que $K(x,y) = x(1-y)$ si $x \leqslant y$ et $K(x,y) = y(1-x)$ sinon

1. Montrer que K est continue sur $[0,1]^2$ et à valeurs dans $\left[0, \dfrac{1}{4}\right]$

2. Pour $0 < x_0 < y_0 < 1$, donner l'équation du plan tangent à la surface d'équation $z = K(x,y)$ au point $M_0 = (x_0, y_0, K(x_0,y_0))$

---

1. On note $F = \{(x,y) \in [0,1]^2, x = y\}$, $E_1 = \{(x,y) \in [0,1]^2, x > y\}$ et $E_2 = \{(x,y) \in [0,1]^2, x < y\}$ de sorte que $[0,1]^2 = F \cup E_1 \cup E_2$. Sur E_1, on a $K(x,y) = y(1-x)$, polynômiale donc K est continue sur E_1. De même, sur E_2, $K(x,y) = x(1-y)$ donc K est continue sur E_2.
Si $(x_0,x_0) \in F$ et $(x,y) \in E_1$ alors $K(x,y) = y(1-x) \xrightarrow[(x,y)\to(x_0,x_0)]{} x_0(1-x_0) = K(x_0,x_0)$. De même, si $(x,y) \in E_2$ alors $K(x,y) = x(1-y) \xrightarrow[(x,y)\to(x_0,x_0)]{} x_0(1-x_0) = K(x_0,x_0)$. On en déduit que K est continue sur F donc sur $[0,1]^2$.
On remarque que $K(x,y) = K(y,x)$ donc il suffit d'étudier K sur $\Delta = \{(x,y) \in [0,1]^2, x \leqslant y\}$ (c'est un triangle rectangle). Sur Δ, on a $K(x,y) = x(1-y) \geqslant 0 = K(0,0)$ donc $\min K = 0$.
On étudie K sur le bord de Δ, qui est la réunion de trois segments $S_1 = \{(x,y) \in [0,1]^2, x = 0\}$, $S_2 = \{(x,y) \in [0,1]^2, y = 1\}$ et $S_3 = \{(x,y) \in [0,1]^2, x = y\}$: sur S_1 et S_2, on a $K = 0$ alors que sur S_3, $K(x,y) = K(x,x) = x(1-x)$ est maximale en $x = \dfrac{1}{2}$ et $K\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{4}$, qui est donc la valeur maximale prise par K sur le bord de Δ.
Reste à étudier $\overset{o}{\Delta} = \{(x,y) \in]0,1[^2, x < y\}$ qui est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, qui est de dimension finie ; sur $\overset{o}{\Delta}$, $K(x,y) = x(1-y)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ donc si K admet un extremum local en (x,y) alors $\dfrac{\partial K}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial K}{\partial y}(x,y) = 0$. On vérifie

que ce système n'admet aucune solution dans $\overset{o}{\Delta}$ (car $0 < x < y < 1$). Ainsi le maximum de Δ sur $[0,1]$ n'est pas atteint en un point de $\overset{o}{\Delta}$ et est donc atteint en un point du bord de Δ. Vue l'étude du bord de Δ faite avant, on a $\max K = K\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$.

2. On a $\nabla K(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial K}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial K}{\partial y}(x_0, y_0)\right) = (1 - y_0, -x_0) \neq (0, 0)$ donc le point (x_0, y_0) est régulier et le plan tangent est alors le plan P_0 passant par $M_0 = (x_0, y_0)$ et normal au vecteur $\nabla K(x_0, y_0)$. Un point $M = (x, y)$ est dans P_0 si et seulement si $\left(\overrightarrow{M_0 M} | \nabla K(x_0, y_0)\right) = 0$ donc si et seulement si $(1 - y_0)(x - x_0) - x_0(y - y_0) = 0$ (qui est l'équation du plan tangent demandée).