Correction du DS1

(d'après de E3A MP 1999 maths 3)

Partie I

1. Pour $\theta = 0$, $\sum \frac{1}{n}$ diverge et pour $\theta = \pi$, $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge par CSSA

2. a) $C_n = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} e^{ik\theta}\right)$ donc pour $\theta \in]0, 2\pi[$, comme $e^{i\theta} \neq 1$, on a $\sum_{k=1}^{n} e^{ik\theta} = e^{i\theta}\frac{1-e^{in\theta}}{1-e^{i\theta}} = e^{i\theta}\frac{e^{in\theta/2}(-2i)\sin\frac{n\theta}{2}}{e^{i\theta/2}(-2i)\sin\frac{\theta}{2}}$.

On conclut donc $\boxed{C_n = \begin{cases} n & \text{si } \theta = 0 \\ \dfrac{\cos\frac{(n+1)\theta}{2}\sin\frac{n\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} & \text{si } \theta \in]0, 2\pi[\end{cases}}$

b) On en déduit $\boxed{|C_n| \leqslant \frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}}}$ On remarque $\frac{\theta}{2} \in]0, \pi[$ donc $\sin\frac{\theta}{2} > 0$

c) $\left|C_n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\right| \leqslant \frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$ et comme la suite $\left(\frac{1}{n}\right)$ tend vers 0, la série $\sum\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$ converge donc, par théorème de comparaison, $\sum\left|C_n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\right|$ converge, ie $\boxed{\sum C_n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \text{ est ACV}}$

d) Cette égalité peut se prouver par récurrence mais on peut aussi le faire ainsi : on remarque que, pour $k \geqslant 1$, $\cos(k\theta) = C_k - C_{k-1}$ donc $\sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(k\theta)}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{C_k - C_{k-1}}{k} \overset{p=k-1}{=} \sum_{k=1}^{n} \frac{C_k}{k} - \sum_{p=0}^{n-1} \frac{C_p}{p+1}$, le terme correspondant à $p = 0$ est nul et on en déduit $\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(k\theta)}{k} = \sum_{k=1}^{n-1} C_k\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) + \frac{C_n}{n}}$

D'après la question précédente, $\sum C_k\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$ converge et, avec (C_n) bornée, $\lim_{n\to+\infty} \frac{C_n}{n} = 0$ donc

$\boxed{\sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos(n\theta)}{n} \text{ converge et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} C_n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)}$

3. a) $g_n - g_{n+1} = -\frac{1}{n+1} + \ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $g_n - g_{n+1} = \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ puis $\boxed{g_n - g_{n+1} \sim \frac{1}{2n^2}}$

b) $g_n - g_{n+1} \sim \frac{1}{2n^2}$ (SATP) et $\sum \frac{1}{n^2}$ CV donc, par théorème de comparaison, $\sum (g_n - g_{n+1})$ CV, puis $\boxed{\text{la suite } (g_n) \text{ converge}}$

4. a) Le résultat étant donné, le plus simple est de le faire par récurrence : pour $n = 1$, $\sum_{k=1}^{2} \frac{(-1)^k}{k} = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$ et $H_1 - H_2 = -\frac{1}{2}$; si on suppose $\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} = H_n - H_{2n}$ alors $\sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^k}{k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} - \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}$ donc $\sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^k}{k} \overset{\text{HR}}{=} H_n - H_{2n} - \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2(n+1)} = \left(H_{n+1} - \frac{1}{n+1}\right) - \left(H_{2n+2} - \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}\right) - \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2(n+1)} = H_{n+1} - H_{2n+2}$

b) La convergence de la série est déjà établie en **I.1** donc $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} = \lim_{n\to+\infty} (H_n - H_{2n})$. On introduit alors la suite (g_n) : $H_n - H_{2n} = (g_n + \ln(n)) - (g_{2n} + \ln(2n)) = g_n - g_{2n} - \ln(2)$ et comme (g_n) CV vers γ, $\lim(g_n - g_{2n}) = \gamma - \gamma = 0$, ce qui donne $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln(2)}$

5. a) $\boxed{\cos\left(n\frac{2\pi}{3}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 3k \\ \dfrac{-1}{2} & \text{si } n = 3k+1 \text{ ou } n = 3k+2 \end{cases}}$

b) On sépare cette fois la somme en trois :

$$\sum_{k=1}^{3n}\frac{\cos(k\theta)}{k}=\underbrace{\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{3p}}_{\text{k=3p}}+\underbrace{\sum_{p=0}^{n-1}\frac{-1/2}{3p+1}}_{\text{k=3p+1}}+\underbrace{\sum_{p=0}^{n-1}\frac{-1/2}{3p+2}}_{\text{k=3p+2}}$$

puis on rajoute les termes de la forme $3p$ avec un facteur $-\dfrac{1}{2}$ (le même que dans les autres sommes) :

$$\sum_{k=1}^{3n}\frac{\cos(k\theta)}{k}=\frac{1}{3}H_n-\frac{1}{2}\left(\sum_{p=0}^{n-1}\frac{1}{3p+1}+\sum_{p=0}^{n-1}\frac{1}{3p+2}+\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{3p}\right)+\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{3p}=\frac{1}{3}H_n-\frac{1}{2}H_{3n}+\frac{1}{6}H_n$$

On en déduit $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{3n}\frac{\cos(k\theta)}{k}=\frac{1}{2}(H_n-H_{3n})}$

c) La convergence de la série ayant déjà été justifiée en **I.2.d**, l'examen de la suite extraite $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{3n}\frac{\cos(k\theta)}{k}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ suffit à conclure $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\cos(k\theta)}{k}=-\frac{1}{2}\ln 3 \text{ pour } \theta=\frac{2\pi}{3}}$ en utilisant le développement asymptotique de **I.3**.

6. a) On pourrait à nouveau le prouver par récurrence ou bien de la façon suivante :

$$\sum_{k=1}^{n}b_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4k}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4k-2}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}=\frac{1}{4}H_n-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}$$

puis en séparant les termes pairs et impairs dans H_{2n} :

$$H_{2n}=\underbrace{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}}_{\text{pairs}}+\underbrace{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}}_{\text{impairs}}=\frac{1}{2}H_n+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}$$

ce qui donne $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}=H_{2n}-\frac{1}{2}H_n$ puis $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}b_k=\frac{1}{2}(H_n-H_{2n})}$

b) Avec le développement asymptotique de **I.3**, on en déduit $\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}b_n=-\frac{1}{2}\ln 2}$

On obtient une valeur différente de celle de **I.4.b**, bien que les termes de la somme soient les mêmes dans un ordre différent :

— la somme partielle de **I.4.b** est

$$-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\dots$$

— celle de $\sum b_n$ est

$$\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-1\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{6}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{10}-\frac{1}{5}\right)+\dots$$

Ceci est dû au fait que la série n'est pas absolument convergente donc en modifiant l'ordre des termes sur une somme infinie, on peut en modifier la valeur. La commutativité de l'addition n'est une propriété valable que pour les sommes finies.

7. a) On a $\left|\dfrac{\cos^2(n\theta)}{n}\right|\leqslant\dfrac{|\cos(n\theta)|}{n}$ car $|\cos(n\theta)|\leqslant 1$ donc, avec le théorème de comparaison des SATP, si $\sum\dfrac{\cos(n\theta)}{n}$ est ACV alors $\boxed{\sum\dfrac{\cos^2(n\theta)}{n} \text{ est aussi ACV}}$

b) On a $\dfrac{\cos^2(n\theta)}{n}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{\cos(2n\theta)}{n}\right)$ donc $\dfrac{1}{n}=2\dfrac{\cos^2(n\theta)}{n}-2\dfrac{\cos(2n\theta)}{2n}$ donc la série $\sum\dfrac{1}{n}$ serait la somme de deux séries ACV donc serait convergente. En effet, $\sum\left|\dfrac{\cos(2n\theta)}{2n}\right|$ serait elle aussi convergente car la somme partielle de cette SATP vérifie $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\cos(2k\theta)}{2k}\right| \leqslant \sum_{k=1}^{2n}\left|\frac{\cos(k\theta)}{k}\right| \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty}\left|\frac{\cos(k\theta)}{k}\right|$ et est donc majorée. Comme $\displaystyle\sum\frac{1}{n}$ est DV, on en déduit $\boxed{\displaystyle\sum\frac{\cos(n\theta)}{n} \text{ n'est pas ACV}}$

Partie II

1. a) Comme $t \neq -1$, on a $\displaystyle\sum_{k=n}^{N-1}(-1)^{k+1}t^k = (-1)^{n+1}t^n\sum_{h=0}^{N-n-1}(-t)^h \boxed{= \frac{(-1)^{n+1}t^n - (-1)^{N+1}t^N}{1+t}}$

b) On a $\boxed{\displaystyle\int_0^1 t^k\,\mathrm{d}t = \frac{1}{k+1}}$ et pour $t\in[0,1]$, on a $0 \leqslant \dfrac{t^k}{1+t} \leqslant t^k$ donc $0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{t^k}{1+t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^k\,\mathrm{d}t = \frac{1}{k+1}$

On a $\displaystyle R_n = \lim_{N\to+\infty}\sum_{k=n+1}^{N}\frac{(-1)^k}{k} = \lim_{N\to+\infty}\sum_{k=n}^{N-1}(-1)^{k+1}\int_0^1 t^k\,\mathrm{d}t$. Par linéarité de l'intégrale et d'après la question précédente, on a $\displaystyle\sum_{k=n}^{N-1}(-1)^{k+1}\int_0^1 t^k\,\mathrm{d}t = \int_0^1\frac{(-1)^{n+1}t^n - (-1)^{N+1}t^N}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1\frac{(-1)^{n+1}t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t + \int_0^1\frac{(-1)^N t^N}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

De plus $\displaystyle\left|\int_0^1\frac{(-1)^N t^N}{1+t}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^1\frac{t^N}{1+t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{N+1}\xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$.

On en déduit donc $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\int_0^1\frac{(-1)^{n+1}t^n - (-1)^{N+1}t^N}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1\frac{(-1)^{n+1}t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t$ et $\boxed{\displaystyle R_n = (-1)^{n+1}\int_0^1\frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t}$

2. a) $t\mapsto\dfrac{t^{n+1}}{n+1}$ et $t\mapsto\dfrac{1}{1+t}$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ donc $\displaystyle\int_0^1\frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\times\frac{1}{1+t}\right]_0^1 - \int_0^1\frac{t^{n+1}}{n+1}\times\frac{-1}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$ et $0 \leqslant \displaystyle\int_0^1\frac{t^{n+1}}{n+1}\times\frac{1}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1\frac{t^{n+1}}{n+1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{(n+1)(n+2)} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $\boxed{R_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{2n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)}$

b) $\displaystyle\sum\frac{(-1)^{n+1}}{2n}$ converge (CSSA) et $\displaystyle\sum\frac{1}{n^2}$ converge absolument (Riemann) donc $\boxed{\sum R_n \text{ converge}}$

3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{N}R_n = \sum_{n=0}^{N}(-1)^{n+1}\int_0^1\frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x = -\int_0^1\frac{1}{1+x}\sum_{n=0}^{N}(-x)^n\,\mathrm{d}x = -\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{(1+x)^2} + (-1)^{N+1}\int_0^1\frac{x^{N+1}}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x$ et comme $0 \leqslant \displaystyle\int_0^1\frac{x^{N+1}}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^{N+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{N+2}\xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$, on a $\boxed{\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}R_n = \int_0^1\frac{-1}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}}$

Partie III

1. a) On a $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n} = \dfrac{2\sqrt{n(n+1)} - (2n+1)}{\sqrt{n+1}}$.

Puis $2\sqrt{n(n+1)} - (2n+1) = n\left[2\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{1/2} - 2 - \dfrac{1}{n}\right] = n\left[2\left(1+\dfrac{1}{2n}+O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right) - 2 - \dfrac{1}{n}\right] = O\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Comme $\sqrt{n+1}\sim\sqrt{n}$, on en déduit $v_{n+1} - v_n = O\left(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)$; la série $\sum(v_{n+1}-v_n)$ est donc absolument convergente donc $\boxed{\text{la suite } (v_n) \text{ converge}}$

b) Cours (par comparaison avec une intégrale)

2. a) Les fonctions $t\mapsto(k+1-t)(t-k)$ et $t\mapsto\dfrac{-2}{3t^{3/2}}$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $[k,k+1]$ donc

$$\int_k^{k+1}\frac{(k+1-t)(t-k)}{t^{5/2}}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{-2(k+1-t)(t-k)}{3t^{3/2}}\right]_k^{k+1} + \frac{2}{3}\int_k^{k+1}\frac{2k+1-2t}{t^{3/2}}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{3}\int_k^{k+1}\frac{2k+1-2t}{t^{3/2}}\,\mathrm{d}t$$

Les fonctions $t\mapsto 2k+1-2t$ et $t\mapsto\dfrac{-2}{\sqrt{t}}$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $[k,k+1]$ donc

$$\int_k^{k+1}\frac{(k+1-t)(t-k)}{t^{5/2}}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{3}\left[\frac{2(2k+1-2t)}{\sqrt{t}}\right]_k^{k+1} - \frac{2}{3}\int_k^{k+1}\frac{4}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right) - \frac{8}{3}\left(2\sqrt{k+1}-2\sqrt{k}\right)$$

b) $v_{k+1} - v_k = \dfrac{1}{\sqrt{k+1}} - 2\sqrt{k+1} + 2\sqrt{k}$ donc la question précédente nous donne

$$\left|v_{k+1} - v_k - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{k+1}} - \frac{1}{\sqrt{k}}\right)\right| = \left|\frac{3}{8}\int_k^{k+1}\frac{(k+1-t)(t-k)}{t^{5/2}}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{3}{8k^2\sqrt{k}},$$

car $\left|\dfrac{(k+1-t)(t-k)}{t^{5/2}}\right| \leqslant \dfrac{1}{k^{5/2}}$ si $t \in [k, k+1]$.

c) La suite (v_n) converge vers L donc la série $\sum (v_{n+1} - v_n)$ converge et $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} (v_{k+1} - v_k) = L - v_n$. De même, $\displaystyle\sum \left(\frac{1}{\sqrt{k+1}} - \frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ converge et $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{k+1}} - \frac{1}{\sqrt{k}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{n}}$. On a donc

$$\left|L - v_n + \frac{1}{2\sqrt{n}}\right| = \left|\sum_{k=n}^{+\infty} \left(v_{k+1} - v_k - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{k+1}} - \frac{1}{\sqrt{k}}\right)\right)\right| \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \left|v_{k+1} - v_k - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{k+1}} - \frac{1}{\sqrt{k}}\right)\right|$$
$$\leqslant \frac{3}{8} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^{5/2}} = O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

On en déduit $\boxed{U_n = 2\sqrt{n} + L + \dfrac{1}{2\sqrt{n}} + O\left(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)}$

3. a) cours : CSSA !

b) $\displaystyle r_{2n} = \sum_{k=2n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} = S - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} = S - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2k}} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{2k+1}} = S - 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2k}} + \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{2k+1}} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2k}}\right)$

donc $\displaystyle r_{2n} = S - 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2k}} + \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}} = \boxed{S - \sqrt{2}U_n + U_{2n}}$

c) $\displaystyle r_{2n} = S - \sqrt{2}\left(2\sqrt{n} + L + \frac{1}{2\sqrt{n}}\right) + \left(2\sqrt{2n} + L + \frac{1}{2\sqrt{2n}}\right) + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) = \boxed{S + (1-\sqrt{2})L - \frac{1}{2\sqrt{2n}} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)}$

d) r_{2n} est le reste d'une série convergente donc $\lim r_{2n} = 0$, ce qui donne $\boxed{S = (\sqrt{2} - 1)L}$

De plus $r_{2n} = -\dfrac{1}{2\sqrt{2n}} + O\left(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ puis $r_{2n+1} = r_{2n} + \dfrac{1}{\sqrt{2(n+1)}} = \dfrac{1}{2\sqrt{2n}} + O\left(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ ce qui donne $r_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{2\sqrt{n}} + O\left(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ donc comme $\sum \dfrac{(-1)^{n+1}}{2\sqrt{n}}$ converge (CSSA) et $\sum \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$ converge absolument (Riemann), on en déduit que $\boxed{\sum r_n \text{ converge}}$

Partie IV

1. a) $f(t) = e^{-t}$, ou $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ et plus généralement $f(t) = \dfrac{1}{t^x}$ avec $x > 0$

b) CSSA

2. On a $\displaystyle\sum_{p=n+1}^{+\infty} (-1)^p[f(p) - f(p+1)] \overset{k=p+1}{=} \sum_{p=n+1}^{+\infty} (-1)^p f(p) - \sum_{k=n+2}^{+\infty} (-1)^{k+1} f(k) = 2t_n - (-1)^{n+1} f(n+1)$ (un tel calcul est possible car toutes les séries qui apparaissent sont convergentes).

On a donc $\displaystyle t_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2} f(n+1) + \frac{1}{2}\sum_{p=n+1}^{+\infty} (-1)^p[f(p) - f(p+1)]$. On commence par vérifier que la fonction $g : x \mapsto f(x) - f(x+1)$ est positive (car f décroît), tend vers 0 (car f aussi) et décroît, car $g'(x) = f'(x) - f'(x+1)$ donc, par croissance de f', $g'(x) \leqslant 0$. On en déduit que $\sum (-1)^p[f(p) - f(p+1)]$ vérifie le CSSA et que son reste vérifie $\displaystyle\left|\sum_{p=n+1}^{+\infty} (-1)^p[f(p) - f(p+1)]\right| \leqslant [f(n+1) - f(n+2)]$. On a donc $t_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{2} f(n+1) + O\big(f(n+1) - f(n+2)\big)$.

La série $\sum \dfrac{(-1)^{n+1}}{2} f(n+1)$ CV par CSSA et $\sum \big(f(n+1) - f(n+2)\big)$ est ACV par télescopage car $\lim\limits_{+\infty} f(n) = 0$.

Par somme on en déduit $\boxed{\sum t_n \text{ converge}}$

3. Comme $f(n+1) \sim f(n+2)$, on a $f(n+1) - f(n+2) = o(f(n+1))$. La question précédente donne donc $t_n = \dfrac{1}{2}(-1)^{n+1} f(n+1) + o(f(n+1))$ donc $t_n \sim \dfrac{1}{2}(-1)^{n+1} f(n+1)$ et $\boxed{t_n \sim \dfrac{(-1)^{n+1}}{2} f(n)}$