TD1 : Séries à termes positifs

Exercice 1
On pose $u_n = \sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2}$, où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer (a,b) pour que $\sum u_n$ converge et calculer la somme dans ce cas. *(*)*

Exercice 2 (CCP PSI 2017)
On pose $a_n = \dfrac{1}{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}$ et on rappelle $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

1. Montrer que $\sum a_n$ converge.

2. Soit $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (H_{2n+1} - H_n) = \ln 2$. *(*)*

3. Trouver $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a_n = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1} + \dfrac{c}{2n+1}$ et en déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a_n$. *(*)*

Exercice 3
Étudier, en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$, la nature de la série $\displaystyle\sum \left(\frac{1}{n!}\right)^{\frac{\alpha}{n}}$. *(*)*

Exercice 4 (Mines-Télécom PSI 2024)

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geqslant 1 + x$.

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = \ln(e^{x_n} - x_n)$.

2. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.

3. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone puis convergente.

4. Étudier la nature de $\sum x_n$. *(*)*

Exercice 5 (Mines-Télécom PSI 2022)
Soient $\alpha > 0$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$ et $w_n = \dfrac{u_n}{S_n^{\alpha}}$.

1. On suppose que $\sum u_n$ converge. Quelle est la nature de $\sum w_n$?

2. On suppose $u_n = n$. Nature de $\sum w_n$?

3. On suppose $u_n = \dfrac{1}{n}$. Nature de $\sum w_n$?

Indications

Exercice 1

DL avec une précision $O\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$ *avant de discuter.*

Exercice 2

2. *Soit une somme de Riemann, soit une comparaison avec une intégrale, soit montrer que la suite* $(H_n - \ln(n))$ *converge.*

3. *Séparer les termes pairs/impairs dans* H_{2n+1} *pour transformer* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1}$.

Exercice 3

Réécrire la formule de Stirling avec un signe $=$ *pour pouvoir la composer par* $\ln$.

Exercice 4

4. *D'Alembert*