

TD2 : Séries numériques

Exercice 1 (CCP PSI 2016)

Montrer que la série de terme général $u_n = \ln(n + 2(-1)^n) - \ln(n)$ converge mais ne converge pas absolument. Vérifie-t-elle le CSSA ?

Exercice 2 (CCINP PSI 2024)

1. Énoncer le critère spécial des séries alternées
2. Étudier la nature de $\sum_{n \geq 1} \cos \left[\pi n^2 \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right]$

Exercice 3

Déterminer la nature des séries $\sum u_n$

1. $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^a + (-1)^n}}$ où $a > 0$.
2. $v_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n n^\beta}$, où $\alpha \neq \beta$. (*)

Exercice 4 (CCINP PSI 2023)

Soit $u_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$, pour $n \geq 1$

1. Montrer que u_n existe et tend vers 0
2. On pose $v_n = \frac{(-1)^n}{n} u_n$. Montrer que $\sum v_n$ converge
3. On pose $w_n = \frac{(-1)^n}{n} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$. Quelle est la nature de $\sum w_n$?
4. On pose $x_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$. Quelle est la nature de $\sum x_n$?

Exercice 5 (CCP PSI 2015)

On admet $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln(2)$. Justifier la convergence et calculer la somme de $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \right)$ puis de $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{4n^3 - n}$.

Exercice 6 (CCINP PSI 2018)

Soit (u_n) définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \frac{e^{-u_n}}{n+1}$.

1. Quelle est la limite de la suite (nu_n) ?
2. Donner la nature des séries de termes généraux u_n et $(-1)^n u_n$. (*)

Exercice 7 (CCP PSI 2019)

1. Montrer que $x^n + x\sqrt{n} - 1 = 0$ admet une unique solution dans $[0, 1]$; on la note x_n .
2. Montrer que (x_n) tend vers 0. (*)
3. Étudier la nature de la série de terme général x_n puis $(-1)^n x_n$. (*)

Indications

Exercice 3

2. Distinguer $\alpha > \beta$ et $\alpha < \beta$.

Exercice 6

2. Ne pas chercher à utiliser le CSSA mais un DL (à partir de x_{n+1}) pour la dernière.

Exercice 7

2. Chercher à majorer x_n , par quelque chose de simple, en utilisant le tableau de signe de $x \mapsto x^n + x\sqrt{n} - 1$.
3. Remarquer que $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}(1 - x_n^n)$ pour obtenir des résultats de plus en plus précis sur x_n .