

psi2. ALI en zone linéaire , corrigé de quelques exercices...**Exercice A.**

Ces deux montages doivent être considérés comme des dipôles : courant entrant i sous la tension v . La principale limitation est que l'autre borne du dipôle est forcément la masse électrique.

Pour les deux montages, on adopte la notation complexe et on note \underline{s} la tension de sortie de l'AO.

Montage de gauche :

Prop de l'AO : $\underline{v}^+ = \underline{v}^- = 0$

LDN à l'entrée -, on sort : $\underline{v}^- = \frac{\frac{v}{R} + jC\omega \underline{s}}{\frac{1}{R} + jC\omega} = 0$ d'où $\underline{s} = -\frac{v}{jRC\omega}$

Loi des nœuds à l'entrée : $\underline{i} = \underline{i}_R + \underline{i}_{R'} = \frac{v - \underline{s}}{R'} + \frac{v - 0}{R}$.

En remplaçant \underline{s} , on obtient :

$$\frac{\underline{i}}{\underline{v}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R'} + \frac{1}{jRR'C\omega}$$

Ceci est l'admittance du dipôle, on doit alors reconnaître 3 dipôles en parallèle : deux résistances R et R' et une bobine parfaite $L=RR'C$. Ce montage permet de simuler une bobine (imparfaite).

Montage de droite : attention au courant de sortie de l'AO : le courant traversant R_2 et R_3 n'est pas i .

On trouve ici : $\frac{\underline{i}}{\underline{v}} = -\frac{R_2}{R_1 R_3} = -\frac{1}{r}$ Ce montage est une résistance négative $-r$.

En mettant les deux montages en parallèle, on obtient une inductance parfaite si $\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = \frac{1}{r}$

Exercice B.

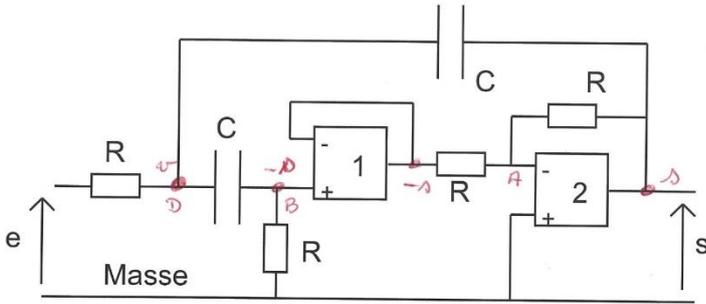
1) Avec des notations évidentes, on trouve :

filtre 1 en haut à gauche : $H_o = -\frac{1}{3}$; $Q = \frac{\sqrt{2}}{3}$; $\omega_o = \frac{1}{RC\sqrt{2}}$

filtre 2 en haut à droite : $H_o = 1 + a$; $Q = \sqrt{a}$; $\omega_o = \frac{\sqrt{a}}{RC}$

filtre 3 en bas : $H_o = -1$; $Q = \frac{R}{\sqrt{R_2 R_3}}$; $\omega_o = \frac{1}{C\sqrt{R_2 R_3}}$

Pour la méthode de calcul , voir les pages suivantes. Le traitement final (maths appliquées pures) n'est pas effectué.



* ALI 2 INVERSEUR RECONNAÎTRE
OU LON EN A) $\Rightarrow -A$ EN SORTIE DE ALI 2

* ALI 1 SUIVEUR $\Rightarrow -A$ À L'ENTRÉE + DE L'ALI 1.

* NOEUDS UTILISABLES : D et B (PDT POSSIBLE)
 \hookrightarrow DEF DE v

* LON EN D : $\frac{1}{R}(e - v) + j\omega C(-A - v) + j\omega C(A - v) = 0$ (1)

* LON EN B : $j\omega C(v - (-A)) + \frac{1}{R}(0 - v) = 0$ (2)

OU PDT EN B : $-A = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} v = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC} v$ (2')

* ELIMINATION DE v ENTRE LES DEUX EQUATIONS
ET TRAITEMENT

(1) $\Rightarrow e = v(1 + 2j\omega RC) \xrightarrow{(2')} \frac{(1 + 2j\omega RC)(1 + j\omega RC)}{j\omega RC} A$

$\hookrightarrow \frac{A}{e} = \frac{j\omega RC}{1 + 3j\omega RC + 2(j\omega RC)^2} = \frac{1}{3 + 2j\omega RC + \frac{1}{j\omega RC}}$
 $= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 + \frac{j}{3}(2RC\omega - \frac{1}{RC\omega})} \xrightarrow{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{3} \frac{1}{1 + j\frac{\sqrt{2}}{3}[\sqrt{2}RC\omega - \frac{1}{\sqrt{2}RC}]}$

[ou] $H_0 = \frac{1}{3}$ EVIDENT

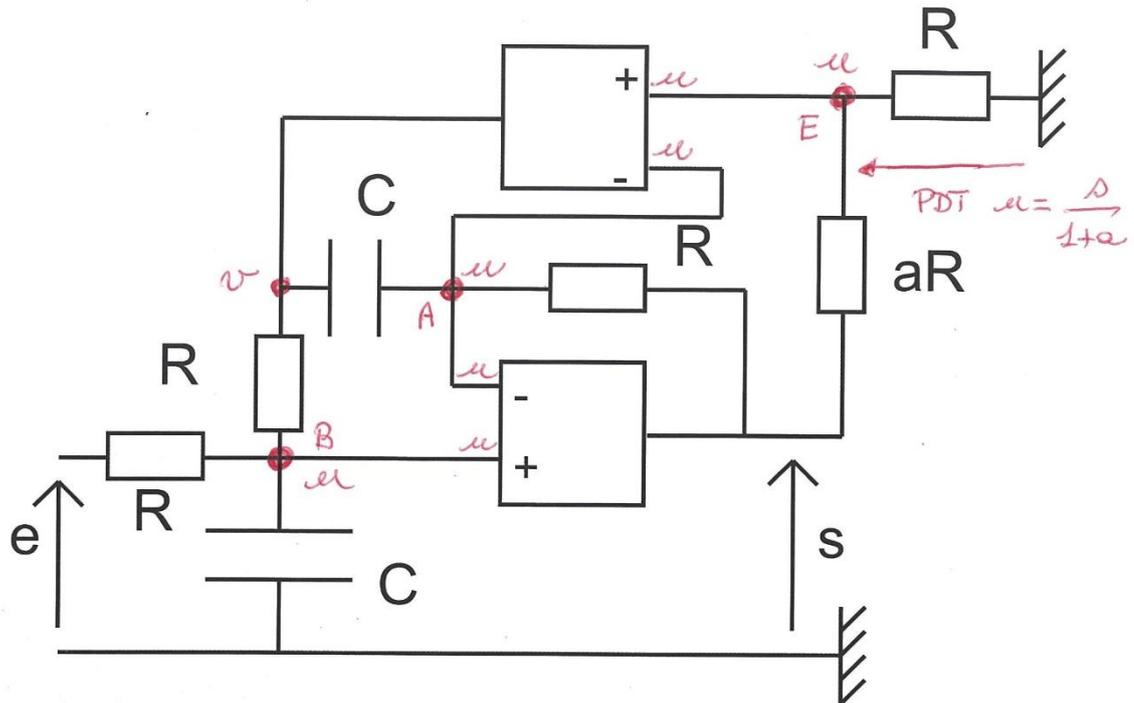
RECONNAÎSSANCE DU TERME IMAGINAIRE

$\frac{Q}{\omega_0} = \frac{2RC}{3}$ $Q\omega_0 = \frac{1}{3RC}$

PRODUIT, QUOTIENT ET ON PREND
LES RACINES POSITIVES

$H_0 = \frac{1}{3}$
 $Q = \frac{\sqrt{2}}{3}$
 $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{2}RC}$

Schéma en haut à droite :



DETECTION DES NOEUDS UTILISABLES : A, B, E.

LDN ou PDT en E : $u = \frac{\Delta}{1+a}$

PROP DES ALI : u EST AUSSI LE POTENTIEL DES POINTS A et B

DEFINITION DE v .

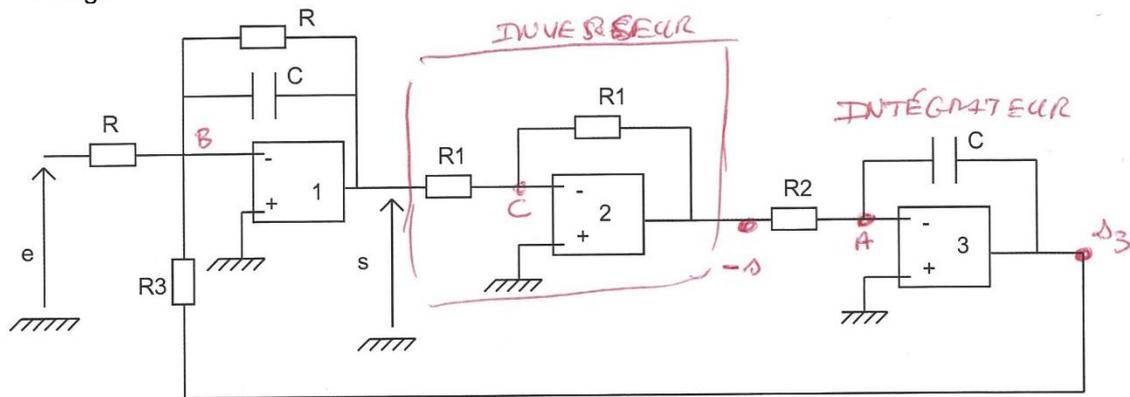
$$\underline{\text{LDN EN A}} : jC\omega(v-u) + \frac{1}{R}(s-u) + 0 + 0 = 0$$

$$\underline{\text{LDN EN B}} : \frac{1}{R}(e-u) + jC\omega(0-u) + \frac{1}{R}(v-u) + 0 = 0.$$

ELIMINATION DE v ENTRE LES DEUX EQUATIONS

\Rightarrow EXPRESSION DE $\underline{H} = \frac{\Delta}{e}$ À TRAITER POUR OBTENIR LA FORME DEMANDÉE

Troisième montage :



* INVERSEUR RECONNU en LDN en C :

* INTÉGRATEUR RECONNU en LDN en A : $s_3 = -\frac{1}{jR_2C\omega} (-s)$

* LDN en B ; 5 BRANCHES

$$\frac{1}{R}(e - v^-) + \frac{1}{R_3}(s_3 - v^-) + \frac{1}{R}(s - v^-) + jC\omega(s - v^-) = 0 \Rightarrow$$

* PROP ALI $v^- = v^+ = 0$

$$\frac{e}{R} + \frac{s_3}{R_3} + \frac{s}{R} + jC\omega s = 0.$$

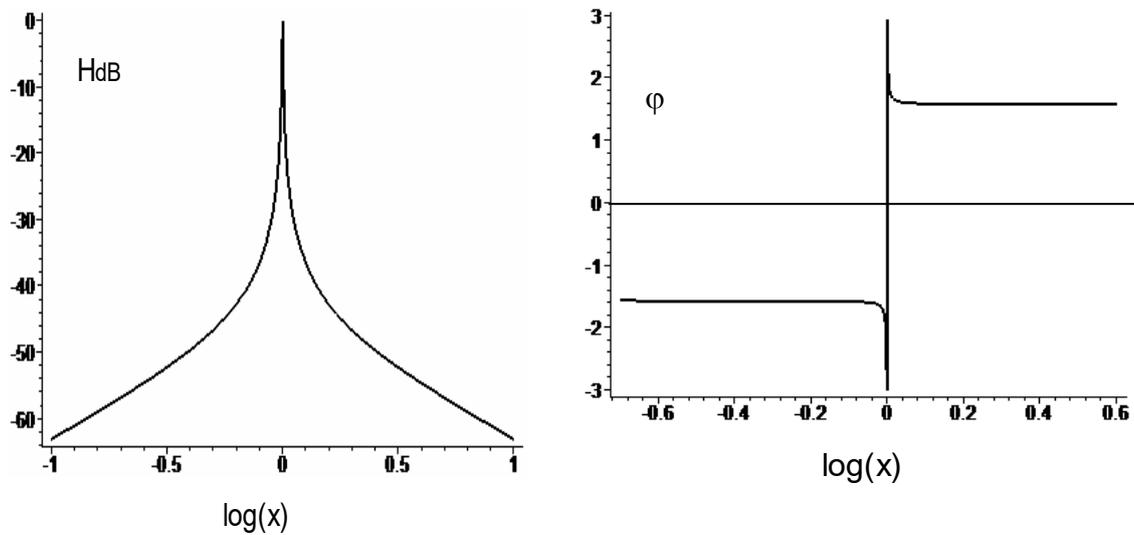
$$\frac{e}{R} + s \left[\frac{1}{jR_2R_3C\omega} + \frac{1}{R} + jC\omega \right] = 0.$$

$$e + s \left[\frac{R}{jR_2R_3C\omega} + 1 + jRC\omega \right] = 0$$

$-\frac{1}{H}$

PUIS TRAITEMENT.

2) Avec les valeurs numériques proposées, on calcule $\omega_0 \approx 31290 \text{ s}^{-1}$ et $Q \approx 145$, soit un filtre passe-bande de pulsation résonance ω_0 et de bande passante $\Delta\omega = \omega_0/Q \approx 220 \text{ s}^{-1}$, soit un filtre sélectif. Le diagramme de Bode avec $x = \omega/\omega_0$ est le suivant :



3) Pour chaque sinusoïde, on calcule la réponse permanente du filtre, et on additionne ensuite les réponses. On peut faire un tableau sur les 7 premières harmoniques :

numéro de l'harmonique	1	2	3	4	5	6	7
pulsation (s^{-1})	10000	20000	30000	40000	50000	60000	70000
amplitude (V)	12,73	0	4,24	0	2,55	0	1,82
gain du filtre	0,0025		0,082		0,007		0,004
avance de phase φ	-1,57		-1,65		1,58		1,58
amplitude de sortie	0,03	0	0,34	0	0,02	0	0,007

On remarque que l'harmonique 3 est prépondérante par rapport aux autres harmoniques et on peut donc affirmer : $s(t) \approx 0,34 \cdot \sin(30000t - 1,65)$ en V et t en s.

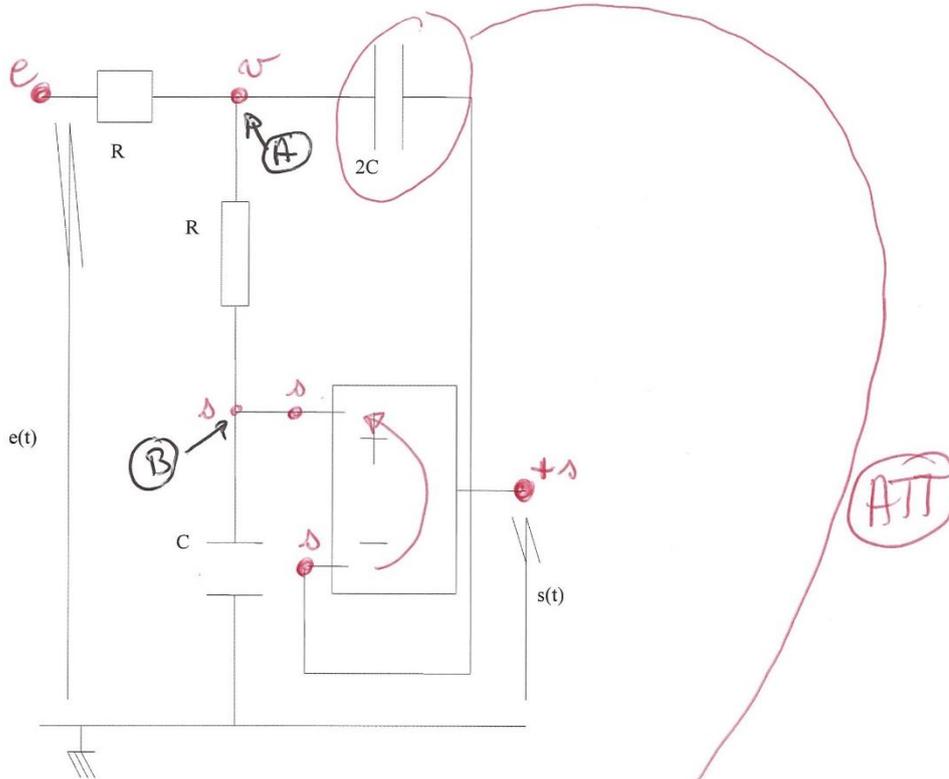
Exercice D partiel.

1) L'ALI fonctionne en suiveur et on retrouve s à l'entrée +.
 Les dipôles R et C sont en série, dont il y a un PDT. On peut aussi appliquer la LDN à l'entrée +.
 On peut enfin appliquer la LDN au nœud liant R,R et 2C.

2) Pas de pb normalement.

3) On a un filtre passe-bas de gain maximal 1, de pulsation de coupure ω_0 . La pente dans la bande coupée est de -40dB/décade.

Dessin identique au filtre RC sauf pente à -40 dB/décade au lieu de -20.



* PROP ALI → s au NOEUD B.

* NOEUDS UTILISABLES A (potentiel v) et B.

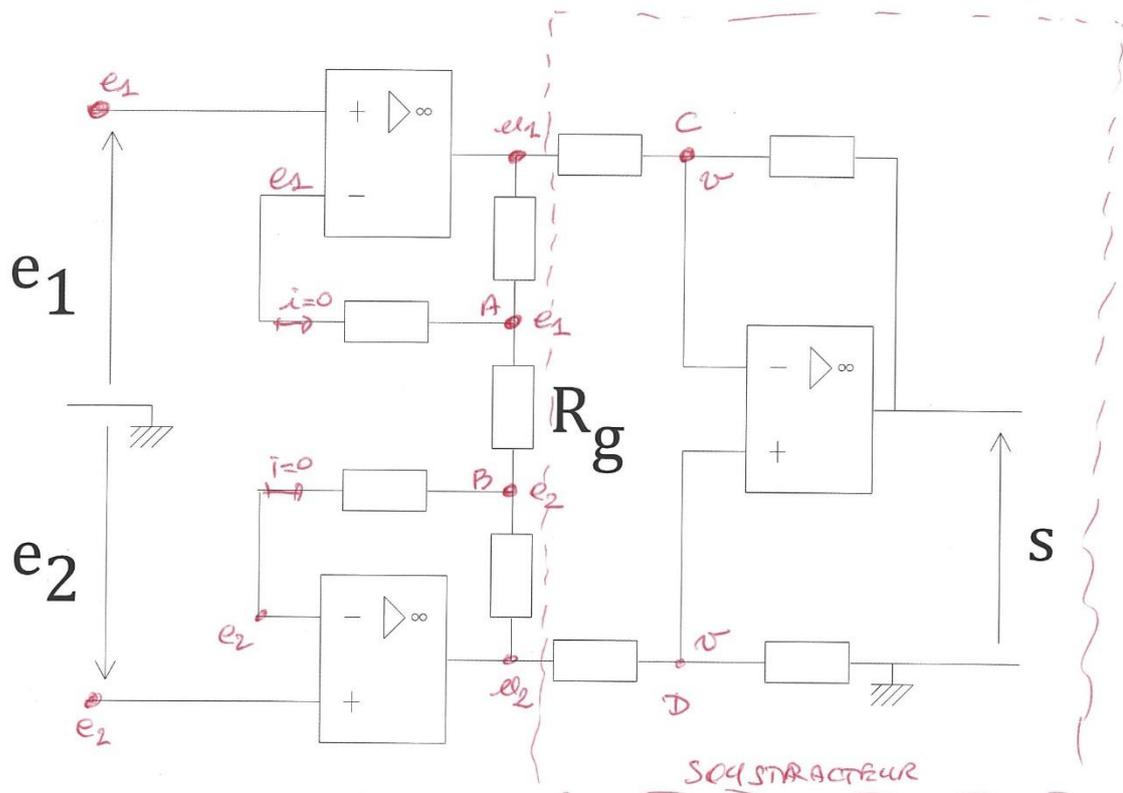
* LDN EN A $\frac{1}{R}(e-v) + 2j\omega C(v-s) + \frac{1}{R}(v-s) = 0$

* LDN EN B: $\frac{1}{R}(v-s) + j\omega C(0-s) + 0 = 0.$

* ELIMINATION DE v ENTRE LES DEUX EQUATIONS:

$$\underline{H} = \frac{1}{1 - 2X^2 + 2jX} \quad \text{avec } X = RC\omega$$

$$G = \|\underline{H}\| = \frac{1}{\sqrt{1 + 4X^4}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\sqrt{2}RC)^4 \omega^4}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{\omega}{\omega_0})^4}} \quad (\omega_0 = \sqrt{2}RC)$$

Exercice E.

* PROP. DES ALIS $\Rightarrow e_1$ aux NOEUD A, e_2 AU NOEUD B.

* DETECTION DES NOEUDS UTILISABLES A, B, C, D.

* PROP ALI : PENE POTENTIEL u en C et D

* DEFINITION DES POTENTIELS u_1 et u_2

* ON PEUT RECONNAITRE LE SOUSSTRACTEUR $\Rightarrow \boxed{D = u_2 - u_1}$
LDN EN C ET D.

* LDN en A : $\frac{1}{R}(u_1 - e_2) + \frac{1}{R_g}(e_2 - e_1) = 0 \Rightarrow u_1 = \dots$

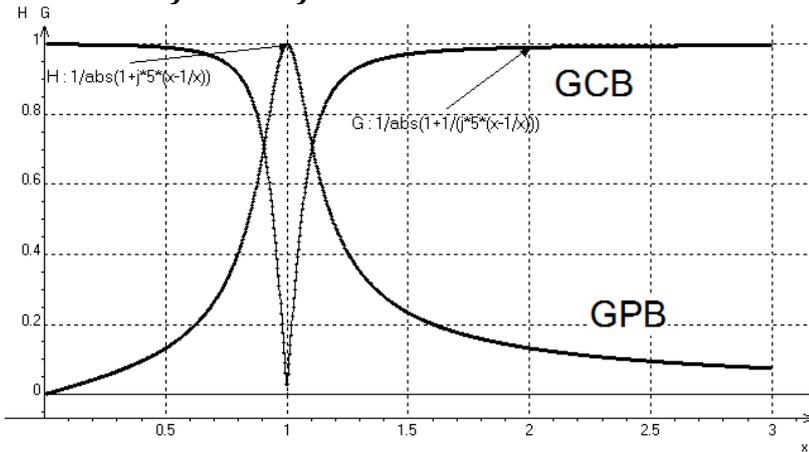
* LDN en B : $\frac{1}{R}(u_2 - e_2) + \frac{1}{R_g}(e_1 - e_2) = 0 \Rightarrow u_2 = \dots$

$$\boxed{D = \left(1 + \frac{2R}{R_g}\right)(e_2 - e_1)}$$

G.Filtre réjecteur de bande.

D)Formes normalisées.

1.1.a) et 1.2.a) Forme des deux courbes en fonction de $x=f/f_0$ pour $Q=5$ et $A_0=1$:



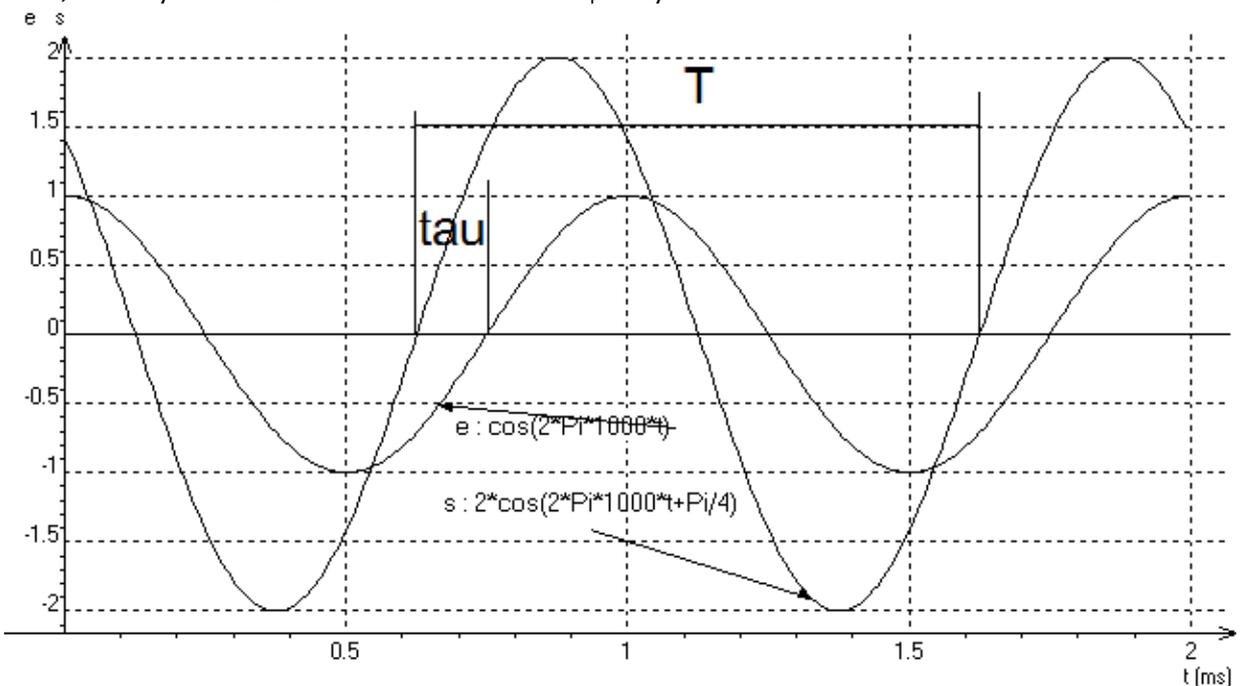
1.1.b) et 1.2.b) Les fréquences de coupure sont les fréquences pour lesquelles $G = \frac{G_{MAX}}{\sqrt{2}}$.

Ici $G_{MAX}=|A_0|$. L'énoncé ne semble pas demander de calculs.

1.1.c) et 1.2.c). Dans les deux cas, on démontre qu'il existe deux solutions réelles positives inverses l'une de l'autre, ce qui permet d'établir rapidement $\Delta f=f_0/Q$, sans calculer les deux fréquences de coupure. Implicitement, Q a été supposé positif.

1.3) Un GBF alimente le filtre avec un signal sinusoïdal de fréquence ajustable. On branche l'entrée sur la voie 1 de l'oscillo, la sortie sur la voie 2. Synchro sur la voie 1, mode CHOPPED.

On observe alors deux sinusoïdes. La mesure des deux amplitudes d'entrée et de sortie permet d'avoir accès au gain en tension G . La mesure sur l'écran de la période T et du décalage temporel τ entre les deux courbes, permet d'avoir ϕ par : $|\phi|=2\pi*\tau/T$. ϕ est positif si la sortie est en avance sur l'entrée. Par exemple : ici l'amplitude de s est deux fois plus grande que l'amplitude de e et donc $G=2$, et $\tau=T/8$ avec s en avance sur e donc $\phi=+\pi/4$.



II) Réalisation d'un passe-bande.

1) On utilise la LDN à l'entrée - de l'AO et au nœud commun A aux 4 dipôles D₁ à D₄. On élimine ensuite V_A entre les deux équations obtenues.

2a) On obtient une structure de filtre passe-bande et l'identité des deux écritures donne :

$$A_0 = -1 \quad Q = \sqrt{\frac{1+\alpha}{2}} \quad f_0 = \sqrt{\frac{1+\alpha}{2}} \cdot \frac{1}{2\pi RC} = \frac{Q}{2\pi RC}$$

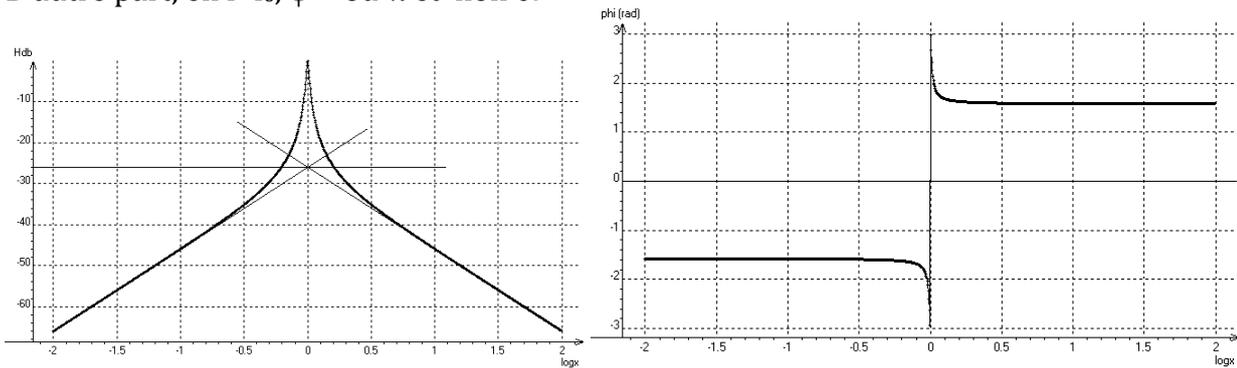
2b) Il s'agit donc d'un filtre passe-bande. On calcule $\alpha = 799$ et $R = 200\text{k}\Omega$.

Pour le diagramme de Bode, il convient de calculer les formes asymptotiques HF et BF.

En BF, soit $f \ll f_0$, on obtient $H_{dB} \approx 20 \cdot \log\left(\frac{f}{f_0}\right) - 26$ et $\varphi = -\pi/2$.

En HF, soit $f \gg f_0$, on obtient $H_{dB} \approx -20 \cdot \log\left(\frac{f}{f_0}\right) - 26$ et $\varphi = +\pi/2$.

D'autre part, en $f = f_0$, $\varphi = +\text{ou} -\pi$ et non 0.



Pour la phase, la discontinuité en $f = f_0$ n'est qu'apparente. Il suffit de décaler l'angle de 2π vers le haut en BF pour la faire disparaître.

3a) Il s'agit tout simplement de la décomposition du carré en série de Fourier, où n désigne le numéro de l'harmonique. On peut vérifier les harmoniques d'ordre pair sont nulles.

3b)

$$\underline{H}_1(f_1) = -1 = 1 \cdot \exp(j\pi) \quad \underline{H}_1(3f_1) \approx 0,02 \cdot \exp(j\frac{\pi}{2}) \quad \underline{H}_1(5f_1) \approx 0,01 \cdot \exp(j\frac{\pi}{2})$$

3c) On a donc l'entrée sous la forme suivante :

$$u_e(t) = \frac{20}{\pi} \left[\sin(2\pi f_1 t) + \frac{1}{3} \cdot \sin(3 * 2\pi f_1 t) + \frac{1}{5} \cdot \sin(5 * 2\pi f_1 t) + \dots \right]$$

Le fondamental passe entièrement, les harmoniques sont d'autant plus atténuées que leur ordre est élevé. Donc, en se limitant aux trois premiers termes et en utilisant les résultats de la question 3 b, on obtient :

$$u_s(t) = \frac{20}{\pi} \left[\sin(2\pi f_1 t) + \frac{1}{3} * 0,02 * \sin\left(3 * 2\pi f_1 t + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{5} * 0,01 \sin\left(5 * 2\pi f_1 t + \frac{\pi}{2}\right) + \dots \right]$$

Seul le fondamental n'est pas atténué, et l'harmonique est atténuée d'un facteur 50. En sortie, on ne verra en fait qu'un signal sinusoïdal de fréquence 50Hz et d'amplitude 6,4V.

III) Réalisation du réjecteur.

1) Il y a un petit piège. La fonction de transfert est calculée A VIDE. Mais ici, la sortie du filtre passe-bande alimente une des résistances r , et donc le filtre passe-bande n'est plus à vide. Il faut alors souligner que la tension de sortie de l'AO est indépendante du courant de sortie, et la sortie du filtre peut être considérée comme un générateur de tension parfait. On a donc : $\underline{U}_1 = \underline{H}_1 \cdot \underline{U}_E$.

2) Le second montage est un additionneur inverseur parfait.

3a) On obtient alors : $\underline{H}_2 = - (1 + \underline{H}_1)$.

3b et c) On obtient la formule d'un réjecteur de bande à la fréquence $f_0 = 50$ Hz et de facteur $Q = 20$. La largeur de la bande coupée est $\Delta f = 2,5$ Hz.

Exercice I.

POUR OBTENIR L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE VÉRIFIÉE PAR $s(t)$, ON PART D'ABORD EN RSP(ω)

PDT $\underline{e}^- = \underline{e}^+ = \underline{e} = \frac{R + \frac{1}{j\omega C}}{2R + \frac{1}{j\omega C}} \underline{s}$

ALI IDEAL EN ZONE LINÉAIRE

CAR LES TROIS DIPÔLES SONT EN SÉRIE. (PAS DE COURANT ENTRANT DS L'ENTRÉE -)

$$\Rightarrow \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{1 + 2jRC\omega}{1 + jRC\omega}$$

$$\hookrightarrow s(t) + RC \frac{ds}{dt} = e(t) + 2RC \frac{de}{dt}$$

POUR LA RÉPONSE INDICIELLE

Pour $t > 0$ $e(t) = E$ $s(t) + RC \frac{ds}{dt} = E$

D'où solution $s(t) = E + A e^{-t/RC}$

OBTENTION DE A ET C

ON SUPPOSE LE CONDENSATEUR INITIALEMENT DÉCHARGÉ

\Rightarrow LA CONTINUITÉ DE LA TENSION AUX BORNES DU

CONDENSATEUR A $t=0 \Rightarrow$ DISCONTINUITÉ DE $s(t)$

$$t=0^- s=0 \Rightarrow t=0^+ s=+2E$$

$$\Rightarrow A = E$$

$$s(t) = E \left(1 + e^{-\frac{t}{RC}} \right)$$



Exercice L.**Partie A.**

1a) Les potentiels électriques sont définis à une constante additive près, donc on peut arbitrairement fixer un (et un seul) potentiel électrique. Maintenant, on a $\underline{V}_C = \underline{E}$.

1b) En A ou B, on a 3 branches donc 3 termes dans la LDN. Pour des raisons d'écriture, j'ignore les traits sous les lettres.

$$\text{En A : } Y_1(E - V_A) + Y_2(0 - V_A) + (-I) = 0$$

$$\text{En B : } Y_4(E - V_B) + Y_3(0 - V_B) + (I) = 0$$

1c) On divise la première équation par $(Y_1 + Y_2)$, la seconde par $(Y_3 + Y_4)$, on fait la différence, puis on remplace les Y par les Z. On obtient :

$$E_g = \frac{Z_2 Z_4 - Z_1 Z_3}{(Z_1 + Z_2) \cdot (Z_3 + Z_4)} \quad Z_g = \frac{Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)} + \frac{Z_3 Z_4}{(Z_3 + Z_4)}$$

Le pont, vu des points A et B, est équivalent un générateur de tension parfait E_g en série avec une impédance Z_g .

2) Si on met un V_m assimilable à une résistance R_v , on a maintenant un PDT qui permet d'exprimer la tension complexe U par : $U = \frac{R_v}{R_v + Z_g} E_g$

Et $U=0$ conduit à $Z_2 Z_4 = Z_1 Z_3$.

3a) On agit successivement sur R_3 , puis sur R_4 , puis R_3 , puis ... pour faire baisser la tension mesurée par le voltmètre. Quand on n'a atteint le minimum le plus faible possible, on est proche du résultat de la question 2. On dit alors que le pont est équilibré.

Quand le pont est équilibré, on a donc : $Z_1 = Z_2 Z_4 Y_3$.

Soit donc : $R + jL\omega = R_2 R_4 \left(\frac{1}{R_3} + jC\omega \right)$.

En séparant parties réelles et imaginaires : $R = \frac{R_2 R_4}{R_3}$ et $L = R_2 R_4 C$

3b) La valeur de la fréquence n'apparaît pas dans le résultat final, donc si les caractéristiques de la bobine sont indépendantes de la fréquence, un changement de fréquence n'aura aucun effet sur le réglage final.

3c) Comme un signal périodique est une somme de sinusoides, si le pont est équilibré, il l'est pour toutes les sinusoides, donc pour la somme donc pour le signal périodique.

Partie B.

Le montage ALI est un suiveur qui permet d'isoler le GBF du montage aval. On n'a plus à tenir compte de la résistance interne R_g du GBF et la tension d'entrée du montage est $e(t)$.

En RSP de pulsation ω , on associe \underline{E} à $e(t)$ et \underline{V}_s à $V_s(t)$ et un PDT donne :

$$\underline{V}_s = \frac{R}{R + R' + jL\omega} \underline{E}$$

En repassant en réel, on obtient l'équation différentielle vérifiée par $V_s(t)$ qui est :

$$V_s(t) + \frac{L}{R + R'} \frac{dV_s(t)}{dt} = \frac{R}{R + R'} e(t)$$

La constante de temps est $\tau = \frac{L}{R + R'} = 78,4 \mu\text{s}$ et la valeur finale de $V_s(t)$ pendant la charge de la bobine est $\frac{R'}{R + R'} E = 4,9V$.

On peut donc calculer : $R = 10,2 \Omega$ et $L = 40 \text{mH}$.

Partie C.

En utilisant la notation complexe, on a $\underline{U} = \underline{Z}.I = \text{Re}(\underline{Z}).I + \text{Im}(\underline{Z}).I.e^{i\pi/2}$

En multipliant par $e^{i\omega t}$, et en prenant la partie réelle, on obtient la formule demandée.

1) L'ALI est idéal en régime linéaire donc $V_+ = V_- = 0$.

Donc la loi d' Ω aux bornes de R_o donne : $i(t) = V_e(t) / R_o$.

On obtient de même $u(t) = 0 - V_s(t) = -V_s(t)$.

$V_e(t)$ est une image du courant $i(t)$; $V_s(t)$ est une image de la tension $u(t)$.

2) Un tel filtre est un déphaseur passe-tout. Sa seule action sur un signal sinusoïdal est de le déphaser, ou de le retarder.

3) Les caractéristiques a et b sont vérifiées. Il faut maintenant imposer la c soit :

$$20 \cdot \frac{1}{2} \log(1 + (5)^{2n}) > 80 \quad \text{soit } 1 + (5)^{2n} > 10^8$$

On peut donc négliger le 1, ce qui donne $> \frac{4}{\log(5)} \approx 5,7$, donc il faut $n=6$

4a)

$$e_1(t) = V_e(t) = R_o I \cos(\omega t) \quad e_2(t) = -u(t) = -\text{Re}(\underline{Z}) I \cos(\omega t) - \text{Im}(\underline{Z}) I \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\text{On en déduit : } s_1(t) = -k \text{Re}(\underline{Z}) R_o I^2 \cos^2(\omega t) - k \text{Im}(\underline{Z}) R_o I^2 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \cos(\omega t)$$

Pour récupérer $\text{Re}(\underline{Z})$, il suffit que $\omega_c \ll \omega$, et le filtre ne laisse passer que la composante continue (le second terme a une valeur moyenne nulle) qui ici est donc : $y_1 = -k \text{Re}(\underline{Z}) \frac{R_o I^2}{2}$

4b) Il suffit maintenant de déphaser $e_1(t)$ de $-\pi/2$ pour que $\text{Im}(\underline{Z})$ apparaisse dans la composante continue. Il faut donc choisir $\omega = \omega_o$.

On en déduit :

$$s_2(t) = -k \text{Re}(\underline{Z}) R_o I^2 \cos(\omega t) \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) - k \text{Im}(\underline{Z}) R_o I^2 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

La valeur moyenne du premier terme est nulle (produit sin.cos), la valeur moyenne du second sera $y_2(t)$, donc on a : $y_2 = k \text{Im}(\underline{Z}) \frac{R_o I^2}{2}$