

Partie I : Étude d'endomorphismes tels que $u \circ u = 0$

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et u un endomorphisme de E non nul tel que $u \circ u = 0$. On note r le rang de u et p la dimension de $\ker u$.

1. a) Montrer que $\operatorname{Im} u \subset \ker u$.
 b) En déduire que $r \leq \frac{n}{2}$ et $p \geq \frac{n}{2}$.
2. Dans cette question, on suppose que $n = 2$.
 a) Justifier que $\operatorname{Im} u = \ker u$.
 b) Soit i un vecteur non nul de $\operatorname{Im} u$ et j un vecteur tel que $i = u(j)$. Montrer que (i, j) est une base de E .
 c) Quelle est la matrice de u dans la base (i, j) ?
3. Dans cette question, on suppose que $n = 3$.
 a) Montrer que $r = 1$. Quelle est la dimension de $\ker u$?
 b) Soit k un vecteur de E n'appartenant pas à $\ker u$ et $i = u(k)$. Justifier l'existence d'un vecteur j de $\ker u$ non colinéaire à i . Montrer qu'alors (i, j, k) est une base de E .
 c) Déterminer la matrice de u dans la base (i, j, k) .
4. Étude du cas général

- a) Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- b) Réciproquement, vérifier que s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, avec $r \leq \frac{n}{2}$ alors $u \circ u = 0$.

Partie II : Application à un exemple

Dans cette partie, on désigne par I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et J la matrice définie par $J = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Soit v l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est J .
 a) Vérifier que $v \circ v = 0$.
 b) Déterminer une base et la dimension de $\operatorname{Im} v$ et $\ker v$.

- c) Trouver une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de v est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Dans la suite, on note P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base $\mathcal{B}$.

2. On considère l'ensemble Δ des matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de la forme $M = I + mJ$ ($m \in \mathbb{R}$).
 a) Montrer que Δ est stable pour la multiplication matricielle.
 b) Δ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?
3. Soit $M = I + mJ$, où m est un réel non nul. On se propose dans cette question de trouver toutes les matrices X de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant l'équation (1) : $X^2 = M$.
 a) Quelles sont les solutions de (1) appartenant à Δ ?
 b) Justifier l'égalité $P^{-1}MP = N$, N désignant la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
 c) Montrer qu'en posant $Y = P^{-1}XP$, l'équation (1) équivaut à l'équation (2) : $Y^2 = N$.
 d) Soit $Y = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ solution de (2). Montrer que $YN = NY$. En déduire que Y est triangulaire supérieure et que $i = a$.
 e) Résoudre l'équation (2). On vérifiera qu'il y a une infinité de solutions dont on précisera la forme.
 f) Exprimer alors les solutions de (1) à l'aide de la matrice P (aucun calcul n'est demandé).