TD3 : Algèbre linéaire

Exercice 1

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que $\mathbb{R}^4 = \ker(A - I_4) \oplus \ker(A + I_4) \oplus \ker(A - 3I_4)$.

Exercice 2 (CCINP PSI 2022)

Soient E un espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^{p-1} \neq 0$ et $f^p = 0$ pour un entier $p \geqslant 1$.

1. Existe-t-il $k \leqslant p$ tel que $f^k = 0$?
2. Montrer qu'il existe un vecteur $x_0 \in E$ tel que $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$ soit libre *(*)*. En déduire $p \leqslant n$. Que vaut f^n ?
3. On suppose qu'il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f = g^2$, montrer que $2p - 1 \leqslant n$

Exercice 3 (CCINP PSI 2024)

Soient $A_1, A_2, A_3, A_4 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$, $C_1 = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_3 \end{pmatrix}$ et $C_2 = \begin{pmatrix} A_2 \\ A_4 \end{pmatrix}$

1. Montrer que $\mathrm{rg}(A) \leqslant \mathrm{rg}(C_1) + \mathrm{rg}(C_2)$. *(*)*
2. Montrer que $\mathrm{rg}(A) \leqslant \displaystyle\sum_{i=1}^{4} \mathrm{rg}(A_i)$. *(*)*
3. On suppose $A_3 = 0$ et $\mathrm{rg}(A_1) = \mathrm{rg}(A_4) = n$. Montrer que A est inversible et déterminer A^{-1}

Exercice 4 (CCINP PSI 2019)

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

1. Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
2. Montrer que si $B^2 = A$ alors $\ker(A^2)$ est stable par B ; que peut-on en déduire ? *(*)*

Exercice 5 (Mines-Télécom PSI 2024)

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u \neq id_E$ et $u^3 = id_E$

1. Soient $E_1 = \ker(u - id_E)$ et $E_2 = \ker(u^2 + u + id_E)$. Montrer que $E_1 \cap E_2 = \{0\}$
2. Calculer $(u^2 + u + id_E) - (u - id_E) \circ (u + 2id_E)$ et en déduire $E = E_1 \oplus E_2$
3. Justifier que, si $\dim(E)$ est impaire, alors $E_1 \neq \{0\}$ et $E_2 \neq \{0\}$. *(*)*

Exercice 6 (CCINP PSI 2021)

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ non nul tel que $f^3 + f = 0$.

1. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \ker(f) \oplus \ker(f^2 + id)$ et $\ker(f^2 + id) \neq \{0\}$
2. Soit $x \in \ker(f^2 + id)$ non nul, montrer que $(x, f(x))$ est libre
3. Déterminer les dimensions de $\ker(f^2 + id)$ et $\ker(f)$.
4. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
5. Trouver les $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $f = u^2$? *(*)*

Indications

Exercice 2

2. *Dans une famille libre, aucun vecteur ne doit être nul.*

Exercice 3

1. *Vérifier* $\mathrm{Im}(A) \subset \mathrm{Im}(C_1) + \mathrm{Im}(C_2)$.
2. *Utiliser la transposée.*

Exercice 4

2. *Utiliser la conclusion de l'exercice 2*

Exercice 5

3. *Si* $E_1 = \{0\}$, *vérifier* $\left(u + \frac{1}{2}id\right)^2 = -\frac{3}{4}id$ *et utliser le déterminant.*

Exercice 6

5. *Chercher des espaces stables par u pour simplifier la forme de la matrice de u avant d'introduire ses coefficients.*