

Intégration sur un intervalle de $\mathbb{R}$

La notation $\mathbb{K}$ désigne soit le corps des nombres réels, soit le corps des nombres complexes. On considère I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points distincts.

I Rappels sur les fonctions

1. Relations de comparaison

Dans ce paragraphe, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ (contenant au moins 2 points distincts) et a un point de I *adhérent* à I , ie soit un point de I , soit une extrémité de I (éventuellement $\pm\infty$).

Une propriété P est satisfaite « au voisinage de a » si P est vraie sur un intervalle de la forme

- $I \cap]a - h, a + h[$, pour un réel $h > 0$, si a est un réel (ie $a \neq \pm\infty$).
- $[A, +\infty[$ si $a = -\infty$, pour un réel $A > 0$.
- $] - \infty, A]$ si $a = +\infty$, pour un réel $A < 0$.

Définition : Soient f et g deux fonctions définies sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$. On dit que :

1. f et g sont **équivalentes** en a , noté $f \sim_a g$ s'il existe une fonction h telle que

$$f = h \times g, \text{ au voisinage de } a \text{ et } \lim_{x \rightarrow a} h(x) = 1$$

2. f est **négligeable** devant g en a , noté $f = o_a(g)$ s'il existe une fonction ε telle que

$$f = \varepsilon \times g, \text{ au voisinage de } a \text{ et } \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$$

3. f est **dominée** par g en a , noté $f = O_a(g)$ s'il existe une fonction h telle que

$$f = h \times g, \text{ au voisinage de } a \text{ et } h \text{ est bornée en } a$$

Remarque(s) :

- (I.1) On a $x \sim_{x \rightarrow 0} \sin(x)$ mais il n'existe pas de fonction h , définie sur $\mathbb{R}$ entier, telle que $x = h(x) \sin(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (une telle égalité n'est possible que au voisinage de 0).
- (I.2) On a donc $f \sim_a g \Rightarrow f = O_a(g)$ et $f = o_a(g) \Rightarrow f = O_a(g)$; les autres implications sont fausses.
- (I.3) $f = o_a(1)$ signifie que f tend vers 0 en a et $f = O_a(1)$ signifie que f est bornée en a .
- (I.4) L'utilisation d'un O , au lieu d'un o , peut permettre « d'économiser » le calcul d'un terme dans un développement limité :

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x \rightarrow +\infty}{=} a_0 + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_{k-1}}{x^{k-1}} + \underbrace{\frac{a_k}{x^k} + o\left(\frac{1}{x^k}\right)}_{= O\left(\frac{1}{x^k}\right)} \\ &= O\left(\frac{1}{x^k}\right) \end{aligned}$$

Propriété [I.1] : Si g ne s'annule pas au voisinage de a , on a les équivalences suivantes :

1. $f \sim_a g$ si et seulement si $\lim_a \frac{f}{g} = 1$
2. $f =_a o(g)$ si et seulement si $\lim_a \frac{f}{g} = 0$
3. $f =_a O(g)$ si et seulement si $\frac{f}{g}$ est bornée au voisinage de a .

Remarque(s) :

(I.5) Pour montrer que $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$, il faut donc prouver que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 f(x) = 0$.

(I.6) Pour montrer que $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$, il faut donc prouver que $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} f(x) = 0$.

Attention :

- Ne pas supprimer les constantes multiplicatives dans les équivalents : $\frac{1+2x}{4+x^2} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{x}$.
- Seule la fonction nulle (au voisinage de a) est équivalente à 0 ; faire attention aux cas particulier dans les équivalents avec un paramètre : équivalent de $\frac{1+\alpha x}{1+x^2}$ quand x tend vers $+\infty$?

Propriété [I.2] : (Croissances comparées)

1. En $+\infty$

- a) Si $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta > 0$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} = 0$ donc $(\ln x)^\alpha \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x^\beta)$.
- b) Si $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\lambda > 0$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha e^{-\lambda x} = 0$ donc $x^\alpha \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(e^{\lambda x})$.

2. En 0

Si $\alpha > 0$ alors $\lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha \ln(x) = 0$ donc $\ln(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)$

Propriété [I.3] :

1. Soient f et g deux fonctions. Si $f \sim_a g$ alors

- f et g sont de même nature en a . Si elles convergent alors $\lim_a f = \lim_a g$.
- f et g sont de même signe au voisinage de a .
- f et g s'annulent en même temps au voisinage de a .

2. Règles de calcul sur les équivalents : si $f_1 \sim_a g_1$ et $f_2 \sim_a g_2$ alors

- $f_1 f_2 \sim_a g_1 g_2$ (produit d'équivalents)
- si f_2 ne s'annule pas au voisinage de a alors $\frac{f_1}{f_2} \underset{a}{\sim} \frac{g_1}{g_2}$ (quotient d'équivalents).

3. On a l'équivalence $f \sim_a g$ si et seulement si $f =_a g + o(g)$

Remarque(s) :

(I.7) La réciproque de la première propriété est en général fausse : si $\lim_a f = \lim_a g$ est finie et non nulle alors $f \sim_a g$.

(I.8) Deux fonctions équivalentes n'ont pas forcément la même monotonie.

(I.9) Ne pas faire de somme d'équivalents !

(I.10) Ne pas composer un équivalent par une fonction ! La dernière propriété permet de remplacer un équivalent par une égalité afin de la composer par une fonction.

Si $f \sim_a g$, $f > 0$ au voisinage de a et si $\lim_a f$ existe dans $[0, 1[\cup]1, +\infty]$ alors $\ln(f) \underset{a}{\sim} \ln(g)$.

(I.11) La dernière propriété permet aussi de déterminer un équivalent à l'aide d'un DL.

2. Intégration

Si $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ et $(a, b) \in I^2$, il suffit que f soit continue sur l'intervalle I pour que l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ existe ; cela signifie en fait que pour qu'une intégrale existe, il suffit que la fonction f soit continue sur le segment d'intégration $[a, b]$ (ou $[b, a]$).

Théorème [I.4] : Soit f continue sur l'intervalle I et $a \in I$ un point de I . La fonction F_a définie sur I par

$$F_a : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$$

est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a . On a donc

$$F_a \in \mathcal{C}^1(I) \text{ et } \forall x \in I, F'_a(x) = f(x)$$

Remarque(s) :

(I.12) Il faut être précis dans l'utilisation de ce résultat :

- Lorsqu'on s'intéresse à l'ensemble de définition de F_a (ie l'existence de $F_a(x)$ pour un réel x fixé), la continuité de f sur le segment $[a, x]$ (ou $[x, a]$) suffit.
- Par contre, lorsqu'on s'intéresse à la dérivabilité de F_a , c'est la continuité de f sur tout l'intervalle I qui compte (*donc l'intervalle ne doit pas dépendre du paramètre x*).

Conséquence [I.5] : Si $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ est continue sur I alors

1. F_a est $\mathcal{C}^1$ sur I et $F'_a = f$ (ne dépend donc pas de la valeur de a).
2. f admet des primitives sur I .

Exemple(s) :

(I.13) Trouver des conditions « raisonnables » pour que $g(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t) dt$ soit dérivable sur un intervalle I et calculer sa dérivée.

Propriété [I.6] : Si f est continue sur I , intervalle contenant 0, et admet un $DL_n(0)$ de la forme

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k + o(x^n)$$

et si F est une primitive de f sur I . Alors F admet un $DL_{n+1}(0)$:

$$F(x) = F(0) + \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} + o(x^{n+1})$$

Remarque(s) :

- (I.14) Cela signifie que l'on peut « intégrer terme à terme » un DL (et que la précision de ce DL augmente) sans hypothèse particulière.
- (I.15) On ne peut par contre pas dériver un DL sans justification : on peut avoir f dérivable sur I , qui admet un $DL_n(0)$ sans que f' n'ait de DL.

Exemple(s) :

(I.16) Trouver le $DL_3(1)$ de $f_1(x) = \arccos\left(\frac{x}{1+x}\right)$.

(I.17) Trouver le $DL_4(+\infty)$ de $f_2(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \ln(x)$.

(I.18) Trouver les $DL_n(0)$ de $g_1(x) = \ln(x^2 - 5x + 6)$ et $g_2(x) = \ln(x^2 + x + 1)$

(I.19) Étudier $f(x) = \int_x^{2x} \frac{\text{ch}(t)}{t} dt$.

Propriété [I.7] : (Formule de Taylor)

Si $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{K})$ et $(a, b) \in I^2$ alors

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

Conséquence [I.8] : (Inégalité de Taylor-Lagrange)

Si $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{K})$ et $(a, b) \in I^2$ alors

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{[a,b]} |f^{(n+1)}|$$

Remarque(s) :

(I.20) $f^{(n+1)}$ est continue sur le segment $[a, b]$ donc $\sup_{[a,b]} |f^{(n+1)}|$ existe et en fait un maximum.

(I.21) Si $a > b$, la « bonne » notation serait en fait $\sup_{[b,a]} |f^{(n+1)}|$.

II Intégration sur un segment des fonctions continues par morceaux

1. Fonctions continues par morceaux sur un segment

Définition : Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$.

1. Une **subdivision** de $[a, b]$ est une famille de réels $(x_i)_{1 \leq i \leq p}$ telle que

$$x_1 = a, x_p = b, \text{ et } \forall i \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket, x_i < x_{i+1}$$

2. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$. On dit que f est **continue par morceaux** sur $[a, b]$ s'il existe une subdivision $(x_i)_{1 \leq i \leq p}$ de $[a, b]$ telle que, pour tout $i \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$, on a

$$f \text{ est continue sur }]x_i, x_{i+1}[\quad \text{et} \quad \lim_{x_i^+} f \text{ et } \lim_{x_{i+1}^-} f \text{ existent}$$

La subdivision $(x_i)_{1 \leq i \leq p}$ est alors appelée subdivision adaptée à f .

On note $\mathcal{CM}^0([a, b], \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Remarque(s) :

(II.1) On dit qu'une subdivision de $[a, b]$ $(y_j)_{1 \leq j \leq q}$ est plus fine qu'une autre subdivision $(x_i)_{1 \leq i \leq p}$ de $[a, b]$ si $\{x_1, \dots, x_p\} \subset \{y_1, \dots, y_q\}$.

(II.2) Si $(x_i)_{1 \leq i \leq p}$ et $(y_j)_{1 \leq j \leq q}$ sont deux subdivisions de $[a, b]$, il existe une subdivision de $[a, b]$ plus fine que $(x_i)_{1 \leq i \leq p}$ et plus fine que $(y_j)_{1 \leq j \leq q}$.

(II.3) Si $(x_i)_{1 \leq i \leq p}$ est une subdivision de $[a, b]$ adaptée à $f \in \mathcal{CM}^0([a, b], \mathbb{K})$, alors toute subdivision de $[a, b]$ plus fine que $(x_i)_{1 \leq i \leq p}$ est aussi adaptée à f .

(II.4) f est continue par morceaux sur $[a, b]$ si et seulement si pour tout $i \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$, la restriction de f à $]x_i, x_{i+1}[$ se prolonge en une fonction continue sur $[x_i, x_{i+1}]$: pour tout $i \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$, la fonction

$$\widetilde{f}_i : x \in [x_i, x_{i+1}] \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in]x_i, x_{i+1}[\\ \lim_{x_i^+} f & \text{si } x = x_i \\ \lim_{x_{i+1}^-} f & \text{si } x = x_{i+1} \end{cases} \quad \text{est continue sur } [x_i, x_{i+1}].$$

Exemple(s) :

$$(II.5) \quad f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ définie par } f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} - 1 & \text{si } x \in]0, 1] \\ 2 & \text{si } x = 0 \\ x \sin(1/x) & \text{si } x \in [-1, 0[\end{cases} \quad \text{alors } f \in \mathcal{CM}^0([-1, 1]).$$

$$(II.6) \quad g : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ définie par } g(x) = \begin{cases} e^{-1/x} - 1 & \text{si } x \in [-1, 0[\\ 2 & \text{si } x = 0 \\ x \sin(1/x) & \text{si } x \in]0, 1] \end{cases} \quad \text{alors } g \notin \mathcal{CM}^0([-1, 1]).$$

Propriété [II.1] :

1. $\mathcal{CM}^0([a, b], \mathbb{K})$ un sous espace vectoriel, stable par produit, de $\mathcal{F}([a, b], \mathbb{K})$, ie

$$\forall (f, g) \in \mathcal{CM}^0([a, b], \mathbb{K})^2, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2, \alpha f + \beta g \in \mathcal{CM}^0([a, b], \mathbb{K}) \text{ et } fg \in \mathcal{CM}^0([a, b], \mathbb{K})$$

2. Si f est continue par morceaux sur le segment $[a, b]$ alors f est bornée sur $[a, b]$.

3. $f \in \mathcal{CM}^0([a, b], \mathbb{C})$ si et seulement si $(\operatorname{Re}(f), \operatorname{Im}(f)) \in \mathcal{CM}^0([a, b], \mathbb{R})^2$

Attention : Même si f , continue par morceaux sur $[a, b]$ est bornée, f peut ne pas avoir de maximum ou de minimum ; c/ex : $f(x) = x$ sur $]0, 1[$ et $f(0) = f(1) = 1/2$.

2. Intégration des fonctions continues par morceaux sur un segment

Définition [II.2] : Soient $f \in \mathcal{CM}^0([a, b], \mathbb{K})$, $(x_i)_{1 \leq i \leq p}$ une subdivision adaptée à f . On définit l'intégrale de f sur $[a, b]$ par

$$\int_{[a, b]} f = \sum_{i=1}^{p-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \widetilde{f}_i(t) dt$$

où $\widetilde{f}_i$ est le prolongement par continuité de $f|_{]x_i, x_{i+1}[}$ au segment $[x_i, x_{i+1}]$.

La valeur de cette intégrale est indépendante de la subdivision $(x_i)_{1 \leq i \leq p}$ adaptée à f .

Remarque(s) :

$$(II.7) \quad \text{Si } f \text{ est continue sur } [a, b], \text{ on retrouve la valeur de } \int_a^b f(t) dt.$$

Propriété [II.3] : (Linéarité)

$$\forall (f, g) \in \mathcal{CM}^0([a, b], \mathbb{K})^2, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2, \int_{[a, b]} \alpha f + \beta g = \alpha \int_{[a, b]} f + \beta \int_{[a, b]} g$$

L'application $f \in \mathcal{CM}^0([a, b], \mathbb{K}) \mapsto \int_{[a, b]} f$ est une forme linéaire sur $\mathcal{CM}^0([a, b], \mathbb{K})$

Propriété [II.4] : (Relation de Chasles)

Soient $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ et $c \in]a, b[$.

On a $f \in \mathcal{CM}^0([a, b], \mathbb{K})$ si et seulement si $f|_{[a, c]} \in \mathcal{CM}^0([a, c], \mathbb{K})$ et $f|_{[c, b]} \in \mathcal{CM}^0([c, b], \mathbb{K})$ et dans ce cas

$$\int_{[a, b]} f = \int_{[a, c]} f|_{[a, c]} + \int_{[c, b]} f|_{[c, b]}$$

Propriété [II.5] :

1. Si $f \in \mathcal{CM}^0([a, b], \mathbb{K})$ est nulle sauf en un nombre fini de points de $[a, b]$ alors $\int_{[a, b]} f = 0$.

2. Si $(f, g) \in \mathcal{CM}^0([a, b], \mathbb{K})^2$ sont égales sauf en un nombre fini de points de $[a, b]$ alors $\int_{[a, b]} f = \int_{[a, b]} g$.

Propriété [II.6] : (Cas particulier des fonctions à valeurs réelles)

1. Si $f \in \mathcal{CM}^0([a, b], \mathbb{R})$ et $f \geq 0$ sur $[a, b]$ alors $\int_{[a, b]} f \geq 0$.
2. Si $(f, g) \in \mathcal{CM}^0([a, b], \mathbb{R})^2$ et $f \leq g$ sur $[a, b]$ alors $\int_{[a, b]} f \leq \int_{[a, b]} g$.
3. Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est **continue** sur $[a, b]$, $f \geq 0$ sur $[a, b]$ alors $\int_{[a, b]} f = 0$ si et seulement si $f = 0$.

Remarque(s) :

(II.8) On rappelle que pour ces propriétés on a supposé $a < b$.

Propriété [II.7] : Si $f \in \mathcal{CM}^0([a, b], \mathbb{K})$ alors $|f| \in \mathcal{CM}^0([a, b], \mathbb{R})$ et

$$\left| \int_{[a, b]} f \right| \leq \int_{[a, b]} |f| \leq (b - a) \times \sup_{[a, b]} |f|$$

Remarque(s) :

(II.9) Le nombre $\frac{1}{b-a} \int_{[a, b]} f$ s'appelle la valeur moyenne de f sur $[a, b]$.

3. Fonctions continues par morceaux sur un intervalle

Définition : Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{K}$. On dit que f est **continue par morceaux sur I** si pour tout segment $[a, b] \subset I$, la restriction de f à $[a, b]$ est continue par morceaux sur $[a, b]$.
On note $\mathcal{CM}^0(I, \mathbb{K})$ l'espace vectoriel des fonctions continues par morceaux sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Remarque(s) :

(II.10) Une fonction continue par morceaux sur I possède un nombre fini de discontinuités sur tout segment de I mais peut avoir une infinité de discontinuités sur $I : \text{ex } x \mapsto \lfloor x \rfloor$ sur $\mathbb{R}$.

(II.11) Une fonction continue par morceaux sur I est bornée sur tout segment de I mais pas sur $I : x \mapsto \lfloor x \rfloor$ sur $\mathbb{R}^+$.

Exemple(s) :

(II.12) La fonction partie entière $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

(II.13) Étude de $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x \lfloor 1/x \rfloor$:

- a) Montrer que f est continue par morceaux sur $]0, 1]$.
- b) Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.
- c) f est-elle continue par morceaux sur $[0, 1]$?

Propriété [II.8] :

1. $\forall (f, g) \in \mathcal{CM}^0(I, \mathbb{K})^2, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2, \alpha f + \beta g \in \mathcal{CM}^0(I, \mathbb{K})$
2. $\forall (f, g) \in \mathcal{CM}^0(I, \mathbb{K})^2, fg \in \mathcal{CM}^0(I, \mathbb{K})$

Attention : L'inverse d'une fonction continue par morceaux qui ne s'annule pas peut ne pas être continue par morceaux ; c/ex : $f : x \in [0, 1] \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \in \mathcal{CM}^0([0, 1], \mathbb{R})$ mais $\frac{1}{f}$ n'est pas continue par morceaux sur $[0, 1]$.

La composée de deux fonctions continues par morceaux peut ne pas être continue par morceaux ; c/ex : $g : x \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$, $f([0, 1]) \subset \mathbb{R}^{+*}$ mais $g \circ f = \frac{1}{f}$ n'est pas continue par morceaux sur $[0, 1]$.

Définition : Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f \in \mathcal{CM}^0(I, \mathbb{K})$ et $(a, b) \in I^2$, on pose

$$\int_a^b f(t) dt = \begin{cases} \int_{[a,b]} f & \text{si } a < b \\ 0 & \text{si } a = b \\ -\int_{[b,a]} f & \text{si } a > b \end{cases}$$

Propriété [II.9] : (Linéarité de l'intégrale)

$$\forall (f, g) \in \mathcal{CM}^0(I, \mathbb{K})^2, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2, \forall (a, b) \in I^2, \int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t)) dt = \alpha \int_a^b f(t) dt + \beta \int_a^b g(t) dt$$

donc $f \in \mathcal{CM}^0(I, \mathbb{K}) \mapsto \int_a^b f(t) dt$ est une forme linéaire.

Propriété [II.10] : (Relation de Chasles)

Soient $f \in \mathcal{CM}^0(I, \mathbb{K})$ et $(a, b, c) \in I^3$, on a

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$$

Propriété [II.11] : (Positivité de l'intégrale pour les fonctions à valeurs réelles)

1. Soient $f \in \mathcal{CM}^0(I, \mathbb{R})$ positive sur I et $(a, b) \in I^2$. Si $a \leq b$ alors $\int_a^b f(t) dt \geq 0$.
2. Si $(f, g) \in \mathcal{CM}^0(I, \mathbb{R})^2$, $f \leq g$ sur I et si $a \leq b$, alors

$$\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$$

Attention : Ne surtout pas oublier l'hypothèse $a \leq b$ dans ces propriétés !

Propriété [II.12] : Si $f \in \mathcal{CM}^0(I, \mathbb{K})$ alors $|f| \in \mathcal{CM}^0(I, \mathbb{R})$ et

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \left| \int_a^b |f(t)| dt \right|$$

Remarque(s) :

(II.14) Si on a de plus $a \leq b$ alors cette inégalité devient $\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$

Propriété [II.13] : (Inégalité de la moyenne)

Si $f \in \mathcal{CM}^0(I, \mathbb{K})$, $(a, b) \in I^2$ et si f est bornée sur I alors

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq |b - a| \times \sup_I |f|$$

Théorème [II.14] : (Changement de variable)

Soient $f \in \mathcal{CM}^0(I, \mathbb{K})$, $\varphi \in \mathcal{C}^1(J, \mathbb{R})$ bijective et strictement monotone sur J telle que $\varphi(J) \subset I$ et $(\alpha, \beta) \in J^2$. Alors $\varphi' \times f \circ \varphi$ est continue par morceaux sur J et on a

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} \varphi'(u) \times f \circ \varphi(u) du$$

Remarque(s) :

(II.15) Si φ est continue sur J alors φ est bijective si et seulement si φ est strictement monotone mais l'énoncé du programme impose les deux notions.

(II.16) Si φ est seulement $\mathcal{C}^1$ et $f \in \mathcal{CM}^0$, il se peut que $f \circ \varphi \times \varphi'$ ne soit pas $\mathcal{CM}^0$; l'hypothèse φ bijective et strictement monotone est donc indispensable dans le cas où f n'est que $\mathcal{CM}^0$. Si $f(x) = \frac{|x|}{x}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ et $\varphi(x) = x^4 \frac{\sin(1/x)}{\sin 1}$ pour $x \neq 0$ et $\varphi(0) = 0$, sur $[-1, 1] = \varphi([-1, 1])$ par exemple.

(II.17) Pour ne pas se tromper entre φ et φ^{-1} (qui pourrait ne pas être $\mathcal{C}^1$), il suffit d'écrire le changement de variable dans le sens $t = \varphi(u)$, ce qui est nécessaire pour ensuite remplacer « $dt = \varphi'(u) du$ ».

Exemple(s) :

(II.18) Calculer $\int_0^{\pi/4} \frac{d\theta}{\cos \theta}$ en posant $u = \tan \frac{\theta}{2}$.

(II.19) Déterminer une primitive de $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ en posant $u = x + \sqrt{1+x^2}$.

III Intégration sur un intervalle quelconque

1. Cas d'une demi-droite $[a, +\infty[$

Définition : Soit f continue par morceaux sur $[a, +\infty[$ avec $a \in \mathbb{R}$.

- Si $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ admet une limite finie quand x tend vers $+\infty$, on dit que **l'intégrale généralisée** (ou impropre) $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ **converge** et on pose

$$\int_a^{+\infty} f(t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t) dt.$$

- Dans le cas contraire, on dit que $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ **diverge**.

Remarque(s) :

(III.1) Soit $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{K}$ continue par morceaux et $c \geq a$. Les intégrales $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ et $\int_c^{+\infty} f(t) dt$ sont de même nature. De plus, si elles convergent alors $\int_a^{+\infty} f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^{+\infty} f(t) dt$.

(III.2) Si f et g sont deux fonctions continues par morceaux sur $[a, +\infty[$, égales au voisinage de $+\infty$, alors les intégrales $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ et $\int_a^{+\infty} g(t) dt$ sont de même nature.

(III.3) Si f est une fonction continue par morceaux sur $[a, +\infty[$ et à valeurs complexes alors $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge si et seulement si les deux intégrales $\int_a^{+\infty} \operatorname{Re}(f(t)) dt$ et $\int_a^{+\infty} \operatorname{Im}(f(t)) dt$ convergent. Si $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge alors $\int_a^{+\infty} f(t) dt = \int_a^{+\infty} \operatorname{Re}(f(t)) dt + i \int_a^{+\infty} \operatorname{Im}(f(t)) dt$.

Exemple(s) :

(III.4) Justifier la convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(1+t+t^2)}$ et calculer sa valeur.

(III.5) Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$ telle que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge. Alors la fonction $F : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto -\int_x^{+\infty} f(t) dt$ est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$; de plus F est l'unique primitive de f sur $\mathbb{R}^+$ qui tend vers 0 en $+\infty$.

(III.6) Soient $f \in \mathcal{CM}^0([a, +\infty[, \mathbb{K})$ et $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite croissante positive qui tend vers $+\infty$.

Si $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge alors $\sum_{n \geq 0} \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t) dt$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t) dt = \int_{x_0}^{+\infty} f(t) dt$.

La réciproque est fautive ; c/ex : $\sum_{n \geq 0} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \cos(t) dt$ converge alors que $\int_0^{+\infty} \cos(t) dt$ diverge.

Propriété [III.1] : Soient $(\alpha, \lambda) \in \mathbb{R}^2$.

1. **(Intégrales de Riemann) :** L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

2. L'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} dt$ converge si et seulement si $\lambda > 0$.

Remarque(s) :

(III.7) **(Lien entre convergence de l'intégrale de f et limite de la fonction f)**

Soit f continue par morceaux sur $[a, +\infty[$. Il n'y a aucun lien entre la convergence de $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ et le fait que f admette une limite en $+\infty$

- $t \mapsto \frac{1}{t}$ tend vers 0 en $+\infty$ mais $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$ diverge
- si $f = \sum_{n \geq 2} f_n$, où $f_n(x) = \begin{cases} n^4(x - n + 1/n^3) & \text{si } x \in [n - 1/n^3, n] \\ -n^4(x - n - 1/n^3) & \text{si } x \in [n, n + 1/n^3] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$, alors $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge mais f n'est pas bornée au voisinage de $+\infty$.

Le seul résultat valable est le suivant : si $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge et si f admet une limite ℓ (finie ou non) en $+\infty$ alors nécessairement, on a $\ell = 0$.

Propriété [III.2] : Soit f continue par morceaux sur $[a, +\infty[$ à valeurs positives.

$\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge si et seulement si la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est majorée sur $[a, +\infty[$.

Si $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ diverge alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t) dt = +\infty$.

Remarque(s) :

(III.8) Il suffit en fait que f soit positive au voisinage de $+\infty$.

(III.9) On a un résultat analogue si f est négative au voisinage de $+\infty$: l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge si et seulement si la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est minorée sur $[a, +\infty[$.

(III.10) La propriété précédente est fautive si f n'est pas de signe fixe au voisinage de $+\infty$; c/ex : $\cos$.

Conséquence [III.3] : Soient f et g continues par morceaux sur $[a, +\infty[$ et telles que $0 \leq f \leq g$.

$$\text{Si } \int_a^{+\infty} g(t) dt \text{ converge alors } \int_a^{+\infty} f(t) dt \text{ converge.}$$

Remarque(s) :

(III.11) Par contraposée, sous les mêmes hypothèses, si $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ diverge alors $\int_a^{+\infty} g(t) dt$ diverge.

(III.12) Pour montrer la convergence de l'intégrale d'une fonction positive, on peut chercher à majorer la fonction ; pour prouver sa divergence, il faut chercher à minorer la fonction.

2. Intégrales convergentes

Définition : (Cas d'un intervalle semi-ouvert)

1. Soit f continue par morceaux sur $[a, b[$ avec $a \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Si $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ admet une limite finie quand x tend vers b , on dit que **l'intégrale généralisée** (ou impropre) $\int_a^b f(t) dt$ **converge** et on définit

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{x \rightarrow b} \int_a^x f(t) dt.$$

Dans le cas contraire, on dit que $\int_a^b f(t) dt$ diverge.

2. Soit f continue par morceaux sur $]a, b]$ avec $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $a < b$ et $b \in \mathbb{R}$. Si $x \mapsto \int_x^b f(t) dt$ admet une limite finie quand x tend vers a , on dit que **l'intégrale généralisée** (ou impropre) $\int_a^b f(t) dt$ **converge** et on définit

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{x \rightarrow a} \int_x^b f(t) dt.$$

Dans le cas contraire, on dit que $\int_a^b f(t) dt$ diverge.

Remarque(s) :

(III.13) Soit $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{K}$ continue par morceaux et $c \in [a, b[$. Les deux intégrales $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_c^b f(t) dt$ sont de même nature. De plus, si elles convergent alors $\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$.

(III.14) Si f et g sont deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b[$, égales au voisinage de b , alors les intégrales $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_a^b g(t) dt$ sont de même nature.

(III.15) Si f est une fonction continue par morceaux sur $[a, b[$ et à valeurs complexes alors $\int_a^b f(t) dt$ converge si et seulement si les deux intégrales $\int_a^b \operatorname{Re}(f(t)) dt$ et $\int_a^b \operatorname{Im}(f(t)) dt$ convergent.
Si $\int_a^b f(t) dt$ converge alors $\int_a^b f(t) dt = \int_a^b \operatorname{Re}(f(t)) dt + i \int_a^b \operatorname{Im}(f(t)) dt$.

Propriété [III.4] : Soient $(\alpha, \lambda) \in \mathbb{R}^2$.

1. **(Intégrales de Riemann) :** L'intégrale $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.

2. L'intégrale $\int_0^1 \ln(t) dt$ est convergente.

Remarque(s) :

(III.16) Par translation, $\int_1^2 \frac{du}{(u-1)^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha < 1$, de même que $\int_0^1 \frac{du}{(1-u)^\alpha}$.

(III.17) **(Lien entre convergence de l'intégrale de f et limite de la fonction f)**

Soit f continue par morceaux sur $[a, b[$. Si $[a, b[$ est un intervalle borné ($b \neq +\infty$) et si f a une

limite finie en b alors $\int_a^b f(t) dt$ converge.

Mais on peut avoir $\int_a^b f(t) dt$ convergente avec f non bornée sur $[a, b[$; ex : $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ sur $]0, 1]$.

Définition [III.5] : (Cas d'un intervalle ouvert)

Soit f continue par morceaux sur $]a, b[$ avec $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $a < b$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. On dit que $\int_a^b f(t) dt$ **converge**

s'il existe $c \in]a, b[$ tel que les deux intégrales $\int_a^c f(t) dt$ et $\int_c^b f(t) dt$ convergent. On pose alors

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$$

La valeur de cette intégrale et sa nature sont indépendantes de $c \in]a, b[$.

Si $\int_a^c f(t) dt$ ou $\int_c^b f(t) dt$ diverge pour un réel $c \in]a, b[$, on dit que $\int_a^b f(t) dt$ **diverge**

Remarque(s) :

(III.18) L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ est divergente pour toute valeur de α .

(III.19) Cela signifie que si f est continue par morceaux sur $]a, b[$, l'étude de la convergence de $\int_a^b f(t) dt$ se fait en deux temps : on choisit $c \in]a, b[$ quelconque et on étudie la convergence des deux intégrales $\int_a^c f(t) dt$ et $\int_c^b f(t) dt$.

(III.20) Si $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ converge alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-x}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$.

Par contre, si $\int_{-x}^x f(t) dt$ admet une limite finie quand x tend vers $+\infty$, on ne peut pas conclure que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ est convergente ; c/ex : $\int_{-x}^x t dt = 0$.

Propriété [III.6] : Soient $f \in \mathcal{C}^0([a, b[, \mathbb{R})$ et F une primitive de f sur $]a, b[$. Alors $\int_a^b f(t) dt$ converge si et seulement si F admet des limites finies en a et b .

Dans ce cas, on a

$$\int_a^b f(t) dt = [F(t)]_a^b = \lim_{t \rightarrow b} F(t) - \lim_{t \rightarrow a} F(t)$$

Exemple(s) :

(III.21) Justifier la convergence et calculer la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$.

Propriété [III.7] : Soit f continue par morceaux sur $[a, b[$, avec $a < b \leq +\infty$, à valeurs positives. Alors

$\int_a^b f(t) dt$ converge si et seulement si la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est majorée sur $[a, b[$.

Si $\int_a^b f(t) dt$ diverge alors $\lim_{x \rightarrow b} \int_a^x f(t) dt = +\infty$.

Remarque(s) :

(III.22) Il suffit en fait que f soit positive au voisinage de b .

(III.23) On a un résultat analogue si f est négative au voisinage de b : l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ converge si et seulement si la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est minorée sur $[a, b[$.

(III.24) De même, si f est $\mathcal{CM}^0$ sur $]a, b]$ et positive alors $\int_a^b f(t) dt$ converge si et seulement si la fonction $x \mapsto \int_x^b f(t) dt$ est majorée.

3. Propriétés des intégrales convergentes

Propriété [III.8] : (Linéarité de l'intégrale)

Soient $(f, g) \in \mathcal{CM}^0(I, \mathbb{K})^2$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$. Si les deux intégrales $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_a^b g(t) dt$ convergent alors l'intégrale $\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t)) dt$ est convergente et on a

$$\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t)) dt = \alpha \int_a^b f(t) dt + \beta \int_a^b g(t) dt$$

Remarque(s) :

(III.25) On peut avoir $\int_a^b (f(t) + g(t)) dt$ convergente avec $\int_a^b f(t) dt$ divergente ; c/ex : $f = -g = id_{\mathbb{R}}$.
Si $\int_a^b (f(t) + g(t)) dt$ converge alors les intégrales $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_a^b g(t) dt$ sont de même nature.

Propriété [III.9] : (Positivité de l'intégrale)

1. Soit $f \in \mathcal{CM}^0(I, \mathbb{R})$ positive telle que $\int_a^b f(t) dt$ converge. Alors on a $\int_a^b f(t) dt \geq 0$
2. Soient $(f, g) \in \mathcal{CM}^0(I, \mathbb{R})^2$ telles que $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_a^b g(t) dt$ convergent. Si $f \leq g$ alors $\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$

Attention : Avec les notations adoptées dans ce paragraphe, on a toujours $a \leq b$

Propriété [III.10] : (Relation de Chasles)

Soit $f \in \mathcal{CM}^0(I, \mathbb{K})$ telle que $\int_I f$ converge. Si $(\alpha, \beta, \gamma) \in (I \cup \{a, b\})^3$ alors les trois intégrales $\int_\alpha^\beta f(t) dt$, $\int_\alpha^\gamma f(t) dt$ et $\int_\gamma^\beta f(t) dt$ convergent et on a

$$\int_\alpha^\beta f(t) dt = \int_\alpha^\gamma f(t) dt + \int_\gamma^\beta f(t) dt$$

Remarque(s) :

$$(III.26) \quad \text{Si } \alpha > \beta, \text{ on pose } \int_\alpha^\beta f(t) dt = - \int_\beta^\alpha f(t) dt.$$

Propriété [III.11] : (Intégration par parties)

Soient f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a, b[$. Si la fonction $f \times g$ admet des limites finies en a et en b alors les deux intégrales $\int_a^b f'(t)g(t) dt$ et $\int_a^b f(t)g'(t) dt$ sont de même nature. Si on suppose de plus que les intégrales convergent alors on a

$$\int_a^b f'(t)g(t) dt = [f \times g]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t) dt$$

Remarque(s) :

$$(III.27) \quad \text{La notation } [f \times g]_a^b \text{ désigne } \lim_b(f \times g) - \lim_a(f \times g)$$

Propriété [III.12] : (Changement de variable)

Soient $f \in \mathcal{CM}^0(]a, b[, \mathbb{K})$ et $\varphi :]\alpha, \beta[\rightarrow]a, b[$ une bijection strictement monotone de la classe $\mathcal{C}^1$ sur $]\alpha, \beta[$. Alors les intégrales $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_\alpha^\beta (f \circ \varphi)(u) \times |\varphi'(u)| du$ sont de même nature. De plus, si ces intégrales convergent, on a

$$\int_a^b f(t) dt = \int_\alpha^\beta (f \circ \varphi)(u) \times |\varphi'(u)| du$$

Exemple(s) :

$$(III.28) \quad \text{Justifier la convergence de } I = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^3} \text{ et la calculer en posant } t = \tan \theta.$$

IV Fonctions intégrables

Notation : Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a = \inf(I)$, $b = \sup(I)$ et f une fonction continue par morceaux sur I . L'intégrale (convergente ou divergente) de f sur I est notée $\int_a^b f(t) dt$ ou $\int_I f$

Définition : Soit f une fonction continue par morceaux sur I . On dit que f est **intégrable sur I** (ou que l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ est absolument convergente) si l'intégrale $\int_a^b |f(t)| dt$ converge. On note $L^1(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions intégrables sur I , à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Remarque(s) :

$$(IV.1) \quad \text{Si } f \text{ est continue par morceaux sur } [a, b[\text{ et } \underline{\text{positive}} \text{ au voisinage de } b \text{ (ou négative), alors } f \text{ est intégrable sur } [a, b[\text{ si et seulement si } \int_a^b f(t) dt \text{ converge.}$$

- (IV.2) Si f est continue par morceaux sur $[a, b[$ et $c \in [a, b[$ alors f est intégrable sur $[a, b[$ si et seulement si f est intégrable sur $[c, b[$. On parle donc de fonction **intégrable en b** .
- (IV.3) Il faut bien connaître cette définition et comprendre, par exemple, la différence entre une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$:
- si f est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ alors f est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ (ou tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}^+$)
 - $x \mapsto \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ mais pas sur $\mathbb{R}^+$.

Propriété [IV.1] : (Exemples de référence)

1. $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$.
2. $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est intégrable sur $]0, 1]$ si et seulement si $\alpha < 1$.
3. $t \mapsto e^{-\lambda t}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ si et seulement si $\lambda > 0$.
4. $\ln$ est intégrable sur $]0, 1]$.

Exemple(s) :

- (IV.4) La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^z}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ si et seulement si $\operatorname{Re}(z) > 1$
- (IV.5) La fonction $t \mapsto e^{-zt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ si et seulement si $\operatorname{Re}(z) > 0$.

Propriété [IV.2] :

1. $x \mapsto \frac{1}{|x-a|^\alpha}$ est intégrable en a si et seulement si $\alpha < 1$.
2. Pour $a \in \mathbb{R}$, on a équivalence entre les trois propriétés
 - i) f est intégrable en a^+
 - ii) $x \mapsto f(a+x)$ est intégrable en 0^+
 - iii) $x \mapsto f(a-x)$ est intégrable en 0^-

Propriété [IV.3] : Soit f continue par morceaux sur I et à valeurs dans $\mathbb{C}$. Alors f est intégrable sur I si et seulement si $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ sont intégrables sur I .

Théorème [IV.4] : Soient f continue par morceaux sur I , $a = \inf(I)$ et $b = \sup(I)$.

$$\text{Si } f \text{ est intégrable sur } I \text{ alors } \int_a^b f(t) dt \text{ converge et } \left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$$

Remarque(s) :

- (IV.6) Pour prouver qu'une intégrale de f converge, le plus souvent, on prouvera que la fonction f est intégrable ; il est alors inutile de s'intéresser au signe de la fonction f .

Par contre lorsque l'on souhaite prouver que $\int_a^b f$ diverge, avec $f \in \mathcal{CM}^0([a, b])$, on montrera en général que f n'est pas intégrable sur $[a, b]$ mais il est indispensable de préciser que f est de signe fixe (au moins au voisinage de b).

Exemple(s) :

- (IV.7) Si $z \in \mathbb{C}$ alors $g_z : t \in \mathbb{R} \mapsto e^{-zt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ si et seulement si $\operatorname{Re}(z) > 0$. Si $\operatorname{Re}(z) > 0$ alors $\int_{\mathbb{R}^+} g_z = \frac{1}{z}$.

Théorème [IV.5] : (Théorème de comparaison)

Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur I .

1. On suppose que : $|f| \leq g$ (donc g à valeurs réelles positives).

Si g est intégrable sur I alors f est intégrable sur I .

2. Si $I = [a, b[$ avec $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ (et $a \in I$ donc $a \in \mathbb{R}$)

$$\left. \begin{array}{l} f = O(g) \text{ (ou } f = o(g)) \\ \text{si} \qquad \qquad \text{et} \\ g \text{ est intégrable sur } [a, b[\end{array} \right\} \text{ alors } f \text{ est intégrable sur } [a, b[.$$

3. Si $I = [a, b[$ avec $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ (et $a \in I$ donc $a \in \mathbb{R}$) et si $f \sim_b g$ alors

f est intégrable sur $[a, b[$ si et seulement si g est intégrable sur $[a, b[$.

Remarque(s) :

(IV.8) Si I est un intervalle ouvert $I =]\alpha, \beta[$ avec $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $\beta \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, pour étudier l'intégrabilité de f sur $] \alpha, \beta[$, on pourra étudier séparément l'intégrabilité de f sur $] \alpha, c[$ et sur $] c, \beta[$ avec c un point de $] \alpha, \beta[$ (ie sur des intervalles « semi-ouverts »), en appliquant deux fois le théorème de comparaison.

Conséquence [IV.6] : (Hors-programme sous cette forme)

1. Si f est continue par morceaux sur $[a, +\infty[$ et s'il existe $\alpha > 1$ tel que $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha f(t) = 0$ alors f est intégrable sur $[a, +\infty[$.
2. Si f est continue par morceaux sur $[a, b[$ (avec $b \neq +\infty$) et s'il existe $\alpha < 1$ tel que $\lim_{t \rightarrow b} (b-t)^\alpha f(t) = 0$ alors f est intégrable sur $[a, b[$.

Remarque(s) :

(IV.9) Ces propriétés ne sont valables que sur des intervalles « semi-ouverts » ; si f est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$, on doit à priori étudier les deux côtés (donc utiliser deux fois la propriété précédente).

(IV.10) Ces deux propriétés ne sont bien sûr pas des équivalences : $f : t \mapsto \frac{1}{t(\ln t)^2}$ est intégrable sur $[2, +\infty[$ (cf plus bas) mais $t^\alpha f(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty$ pour tout $\alpha > 1$.

Exemple(s) :

(IV.11) **Intégrales de Bertrand** : $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$ converge si et seulement si $\begin{cases} \alpha > 1 \\ \text{ou} \\ \alpha = 1 \text{ et } \beta > 1 \end{cases}$.

(IV.12) $\int_1^2 \frac{dt}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$ converge si et seulement si $\beta < 1$.

(IV.13) Montrer que $\int_0^{+\infty} \sin^2\left(\frac{1}{t}\right) dt$ converge.

(IV.14) Déterminer la nature de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin \frac{1}{t}}{1+t^2} dt$, $\int_0^{+\infty} \exp\left(-\sqrt{t} + \ln(t) \frac{\sin t}{t}\right) dt$ et $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan^\alpha t dt$ en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$.

Conséquence [IV.7] : L'ensemble $L^1(I, \mathbb{K})$ des fonctions intégrables sur I est un sous espace vectoriel de $\mathcal{CM}^0(I, \mathbb{K})$ sur lequel $f \mapsto \int_I f$ est une forme linéaire.

Attention : Le produit de deux fonctions intégrables sur I peut ne pas être intégrable sur I ; c/ex : $f : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est intégrable sur $]0, 1]$ mais pas $f \times f$.

Propriété [IV.8] : Si f est continue, positive et intégrable sur I et si $\int_I f = 0$ alors $f = 0$.

Remarque(s) :

(IV.15) La réciproque de cette propriété est bien sûr vraie

(IV.16) Il existe des fonctions telles que $\int_I f$ converge mais non intégrables sur I ; c/ex : la fonction $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t^\alpha}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ si et seulement si $1 < \alpha < 2$ mais $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha} dt$ converge si et seulement si $0 < \alpha < 2$.

(IV.17) **IPP et intégrabilité :** si f et g sont $\mathcal{C}^1$ sur I et si fg admet des limites finies aux bornes de I , on peut avoir $f'g$ intégrable sur I et fg' non intégrable sur I : *une IPP ne conserve pas l'intégrabilité des fonctions mais conserve seulement la convergence des intégrales.*

(IV.18) **Changement de variable et intégrabilité :** si f est continue par morceaux sur I , et si $\varphi : J \rightarrow I$ est une bijection strictement monotone de classe $\mathcal{C}^1$ alors f est intégrable sur I si et seulement si $f \circ \varphi \times \varphi'$ est intégrable sur J : *un changement de variable conserve l'intégrabilité des fonctions.*

Exemple(s) :

(IV.19) Justifier la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt$ puis la calculer en posant $u = \frac{1}{t}$.

(IV.20) Soient $\alpha > -1$ et $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+)$, décroissante, telle que $t \mapsto t^\alpha f(t)$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.
Montrer que $t \mapsto t^{\alpha+1} f'(t)$ et $t \mapsto t^\alpha f(t)$ sont intégrables sur $\mathbb{R}^{+*}$ et que

$$\int_0^{+\infty} t^{\alpha+1} f'(t) dt = -(\alpha + 1) \int_0^{+\infty} t^\alpha f(t) dt$$