L'usage des calculatrices est interdit

Notations et rappels

Dans tout le sujet, n désigne un entier naturel non nul et E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension n .

Si M est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on définit la suite des puissances de M par $M^0 = I_n$ et, pour tout entier naturel k , par la relation $M^{k+1} = M M^k$.

De même, si u est un endomorphisme de E , on définit la suite des puissances de u par $u^0 = id_E$ et, pour tout entier naturel k , par la relation $u^{k+1} = u \circ u^k$.

Une matrice M est dite *nilpotente* s'il existe un entier naturel $k \geq 1$ tel que $M^k = 0$. Dans ce cas, le plus petit entier naturel $k \geq 1$ tel que $M^k = 0$ s'appelle l'*indice de nilpotence* de M . On a donc par définition $M^p = 0$ et $M^{p-1} \neq 0$ si M est nilpotente d'indice p .

Soit $\mathcal{B}$ une base de E , un endomorphisme de E est nilpotent d'indice p si sa matrice dans $\mathcal{B}$ est nilpotente d'indice p .

On pose $J_1 = (0)$ et, pour un entier $\alpha \geq 2$, $J_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_\alpha(\mathbb{C})$. On a donc en particulier $J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$, on note $\text{diag}(A, B)$, la matrice diagonale par blocs

$$\text{diag}(A, B) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+m}(\mathbb{C}).$$

Plus généralement, si $A_1 \in \mathcal{M}_{n_1}(\mathbb{C})$, $A_2 \in \mathcal{M}_{n_2}(\mathbb{C})$, $\dots$, $A_k \in \mathcal{M}_{n_k}(\mathbb{C})$, on note

$$\text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_k) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_k \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n_1+n_2+\dots+n_k}(\mathbb{C}).$$

I Deux exemples

1. Dans cette première question on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

- Vérifier que A est nilpotente et déterminer son indice de nilpotence.
- Que valent $\text{Tr}(A)$ et $\det(A)$?
- Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^2$ canoniquement associé à la matrice A . On pose $\varepsilon_1 = (1, 0)$ et $\varepsilon_2 = u(\varepsilon_1)$. Vérifier que $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est une base de $\mathbb{C}^2$.
- En déduire que A est semblable à J_2 et donner une matrice $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ inversible telle que

$$A = P J_2 P^{-1}$$

2. On s'intéresse cette fois à la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 2 & 6 & -14 \\ 1 & 3 & -7 \end{pmatrix}$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ canoniquement associé à B .

- On pose $\varepsilon_1 = (1, 0, 0)$ et $\varepsilon_2 = u(\varepsilon_1)$. Vérifier que $\varepsilon_2 \in \ker(u)$.
- Déterminer un vecteur ε_3 de $\mathbb{C}^3$ tel que $(\varepsilon_2, \varepsilon_3)$ soit une base de $\ker(u)$.
- Démontrer que B est semblable à la matrice $\text{diag}(J_2, J_1)$. Donner la valeur d'une matrice P inversible telle que

$$B = P \text{diag}(J_2, J_1) P^{-1}$$

II Premiers résultats

1. Que peut-on dire d'un endomorphisme nilpotent d'indice 1 ?

A - Réduction d'une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice 2

On suppose que $n = 2$. Soit u un endomorphisme de E nilpotent d'indice $p \geq 2$.

2. On suppose, dans cette question et la suivante, que $p \geq 3$. Justifier qu'il existe un vecteur $x \in E$ tel que $u^{p-1}(x) \neq 0$
3. Vérifier que, pour un tel vecteur x , la famille $(x, u(x), u^2(x))$ est libre.
4. En déduire que $p = 2$.
5. Montrer que $\ker(u) = \text{Im}(u)$.
6. Construire une base de E dans laquelle la matrice de u est égale à J_2 .
7. En déduire que les matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ sont exactement les matrices de trace et déterminant nuls.

B - Réduction d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice 2

On suppose que $n \geq 3$. Soit u un endomorphisme de E nilpotent d'indice 2 et de rang r .

8. Montrer que $\text{Im}(u) \subset \ker(u)$ et que $2r \leq n$.
9. On suppose que $\text{Im}(u) = \ker(u)$.
 - a) Montrer qu'il existe des vecteurs $e_1, e_2, \dots, e_r$ de E tels que la famille $(e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), \dots, e_r, u(e_r))$ soit une base de E .
 - b) Donner la matrice de u dans cette base.
10. On suppose $\text{Im}(u) \neq \ker(u)$.
 - a) Montrer qu'il existe des vecteurs $e_1, e_2, \dots, e_r$ de E et des vecteurs $v_1, v_2, \dots, v_{n-2r}$ appartenant à $\ker(u)$ tels que $(e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), \dots, e_r, u(e_r), v_1, v_2, \dots, v_{n-2r})$ soit une base de E .
 - b) Quelle est la matrice de u dans cette base ?

C - Polynômes annulateurs d'une matrice nilpotente

Dans cette partie, A désigne une matrice nilpotente d'indice $p \geq 2$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à A .

11. Justifier que A n'est pas inversible.
12.
 - a) Montrer qu'il existe $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ tel que $\ker(u^k) = \ker(u^{k+1})$.
 - b) Vérifier $\ker(u^h) = \ker(u^{h+1})$ pour $h \geq k$ et en déduire $p \leq n$ puis que X^n annule u .
13. Démontrer que tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ multiple de X^p est un polynôme annulateur de A .

On suppose que P est un polynôme annulateur de A .

14. Démontrer que 0 est racine de P ; *on pourra raisonner par l'absurde et montrer que si $P(0) \neq 0$ alors A est inversible.*
15. On note m la multiplicité de 0 dans P , ce qui permet d'écrire $P = X^m Q$ où Q est un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ tel que $Q(0) \neq 0$. Soit x un vecteur de $\mathbb{C}^n$ appartenant au noyau de $Q(u)$: $x \in \ker(Q(u))$.
 - a) Calculer $u^{p-1} \circ Q(u)(x)$ et en déduire $u^{p-1}(x) = 0$.
 - b) Montrer par récurrence sur $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ que $u^{p-k}(x) = 0$; *on pourra considérer $u^h \circ Q(u)(x)$ pour des entiers h bien choisis.*
 - c) En déduire que $Q(A)$ est inversible.
 - d) Montrer que P est un multiple de X^p .

D - Racines carrées de matrices nilpotentes

Pour une matrice $V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ donnée, on dit qu'une matrice $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est une racine carrée de V si $R^2 = V$. On se propose d'étudier l'existence et les valeurs de racines carrées éventuelles de certaines matrices nilpotentes.

16. On cherche à déterminer l'ensemble des matrices $R \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telles que $R^2 = B$, où B est la matrice introduite dans la partie I (à la question 2). On note u l'endomorphisme canoniquement associé à B et ρ celui associé à une telle matrice R .

- Démontrer que $\text{Im}(u)$ et $\text{ker}(u)$ sont stables par ρ et que ρ est nilpotent.
- En déduire l'ensemble des racines carrées de B . *on pourra considérer $R' = P^{-1}RP$, où P est la matrice introduite à la question I.2.c (la valeur exacte de cette matrice n'est pas nécessaire pour traiter cette question)*

et commencer par montrer que R' est de la forme $R' = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & \alpha & \beta \\ c & 0 & \gamma \end{pmatrix}$.

17. On se propose dans cette question d'étudier l'équation matricielle $R^2 = J_3$.

Soit R une solution de cette équation. Donner les valeurs de R^4 et R^6 , puis l'ensemble des solutions de l'équation.

18. En général, soit $V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente d'indice p . On se propose d'étudier l'équation $R^2 = V$.

- Montrer que, si $2p - 1 > n$, alors il n'existe aucune solution.
- Pour toute valeur de l'entier $n \geq 3$, exhiber une matrice $V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, nilpotente d'indice $p \geq 2$ et admettant au moins une racine carrée.

III Réduction des matrices nilpotentes

On suppose $n \geq 2$. Soit u un endomorphisme de E nilpotent d'indice $p \geq 2$.

- Démontrer que $\text{Im}(u)$ est stable par u et que l'endomorphisme v induit par u sur $\text{Im}(u)$ est nilpotent. Préciser son indice de nilpotence.
- Pour tout vecteur x non nul de E , on note $C_u(x)$ l'espace vectoriel engendré par les $(u^k(x))_{k \in \mathbb{N}}$; démontrer que $C_u(x)$ est stable par u et qu'il existe un plus petit entier $s(x) \geq 1$ tel que $u^{s(x)}(x) = 0$.
- Démontrer que $(x, u(x), \dots, u^{s(x)-1}(x))$ est une base de $C_u(x)$ et donner la matrice, dans cette base, de l'endomorphisme w_x induit par u sur $C_u(x)$.
- Démontrer par récurrence sur p qu'il existe des vecteurs $x_1, \dots, x_t$ de E tels que

$$E = \bigoplus_{i=1}^t C_u(x_i)$$

Indication : on pourra appliquer l'hypothèse de récurrence à l'endomorphisme v induit par u sur $\text{Im}(u)$.

- Donner la matrice de u dans une base adaptée à la décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^t C_u(x_i)$.