Correction du DS2

(inspiré de Centrale PSI 2019 maths 2)

Partie I :

1. a) On vérifie $A^2 = 0$ (et $A \neq 0$) donc $\boxed{A \text{ est nilpotente d'indice } 2}$

b) $\boxed{\mathrm{Tr}(A) = \det(A) = 0}$

c) $\det(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ donc $\boxed{\mathcal{B} \text{ est une base de } \mathbb{C}^2}$

d) On a $u(\varepsilon_1) = \varepsilon_2$ et $u(\varepsilon_2) = u^2(\varepsilon_1) = 0$ donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = J_2$ et $\boxed{A = PJ_2P^{-1} \text{ si } P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}$

2. a) $\varepsilon_2 = (1, 2, 1)$ et on vérifie $B \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ donc $\boxed{u(\varepsilon_2) = 0}$

b) On a $C_2 = 3C_1$, $C_3 = -7C_1$ et $C_1 \neq 0$ donc $\mathrm{rg}(B) = 1$ puis $\dim(\ker(u)) = 3 - \mathrm{rg}(B) = 2$. Comme $3C_1 - C_2 = 0$ les vecteurs ε_2 et $\boxed{\varepsilon_3 = (3, -1, 0)}$ sont deux vecteurs non colinéaires de $\ker(u)$ donc forment une base de $\ker(u)$.

c) On vérifie que $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de $\mathbb{C}^3$ car si $\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$ alors $\det(P) = 1 \neq 0$ et comme

$\begin{cases} u(\varepsilon_1) = \varepsilon_2 \\ u(\varepsilon_2) = u(\varepsilon_3) = 0 \end{cases}$, on a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(J_2, J_1)$ et $B = P\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)P^{-1}$.

Partie II

1. Si u est nilpotent d'indice 1 alors $u^1 = 0$ donc $\boxed{u = 0}$

2. Par définition de l'indice de nilpotence, on a $u^{p-1} \neq 0$ donc $\boxed{\exists x \in E, u^{p-1}(x) \neq 0}$

3. Si $\alpha x + \beta u(x) + \gamma u^2(x) = 0$ alors, en composant par u^{p-1}, on a $\alpha u^{p-1}(x) + \beta u^p(x) + \gamma u^{p+1}(x) = 0$ ce qui donne, avec $u^p = u^{p+1} = 0$, $\alpha u^{p-1}(x) = 0$ donc $\alpha = 0$ puisque $u^{p-1}(x) \neq 0$. Il reste alors $\beta u(x) + \gamma u^2(x) = 0$, on compose cette fois par u^{p-2} (ce qui est possible car $p - 2 \geqslant 0$) et on obtient de même $\beta = 0$. Reste enfin $\gamma u^2(x) = 0$ et comme $p \geqslant 3$, on a $u^2(x) \neq 0$ donc on en déduit $\gamma = 0$. Ainsi $\boxed{(x, u(x), u^2(x)) \text{ est une famille libre}}$

4. On vient de construire une famille libre de 3 vecteurs alors que $\dim(E) = 2$, ce qui est absurde. On en déduit $p \leqslant 2$ donc $\boxed{p = 2}$ puisque $p \geqslant 2$ par hypothèse.

5. $u^2 = 0$ donc $\mathrm{Im}(u) \subset \ker(u)$ puis $\mathrm{rg}(u) \leqslant \dim(\ker(u))$ et, par le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Im}(u)) + \dim(\ker(u)) = 2$. On a donc deux possibilités : $\dim(\mathrm{Im}(u)) = 0$ et $\dim(\ker(u)) = 2$, ce qui donnerait $u = 0$ qui serait nilpotent d'indice 1, ou bien $\dim(\mathrm{Im}(u)) = \dim(\ker(u)) = 1$ (qui est donc la seule possibilité). L'inclusion $\mathrm{Im}(u) \subset \ker(u)$ et l'égalité des dimensions donne donc $\boxed{\mathrm{Im}(u) = \ker(u)}$

6. Soit ε_2 un vecteur non nul $\mathrm{Im}(u)$; il existe donc ε_1 tel que $\varepsilon_2 = u(\varepsilon_1)$. On vérifie alors que $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est une base de E : si $\alpha\varepsilon_1 + \beta\varepsilon_2 = 0$ alors $\alpha u(\varepsilon_1) + \beta u^2(\varepsilon_1) = 0$ donc $\alpha\varepsilon_2 = 0$, ce qui donne $\alpha = 0$ car $\varepsilon_2 \neq 0$; reste $\beta\varepsilon_2 = 0$ donc $\beta = 0$. $\mathcal{B}$ est donc une base de E puisque $\dim(E) = 2$ et comme $\begin{cases} u(\varepsilon_1) = \varepsilon_2 \\ u(\varepsilon_2) = 0 \end{cases}$, on a $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = J_2}$

7. Si A est nilpotente d'indice p alors soit $p = 1$ et $A = 0$, soit $p = 2$ et A est semblable à J_2 ; dans les deux cas, on a $\mathrm{Tr}(A) = \det(A) = 0$ puisque $\mathrm{Tr}(J_2) = \det(J_2) = 0$. Réciproquement, soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ qui vérifie les égalités $\det(A) = \mathrm{Tr}(A) = 0$; on a alors $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ avec $a^2 + bc = 0$. On vérifie alors $A^2 = 0$. On a donc bien l'équivalence

$\boxed{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \text{ est nilpotente si et seulement si } \mathrm{Tr}(A) = \det(A) = 0}$

8. $u^2 = 0$ donc si $y = u(x) \in \mathrm{Im}(u)$, on a $u(y) = u^2(x) = 0$ donc $y \in \ker(u)$ et $\boxed{\mathrm{Im}(u) \subset \ker(u)}$ Par le théorème du rang, on a donc $r \leqslant \dim(\ker(u)) = n - r$ donc $\boxed{2r \leqslant n}$

9. a) On choisit $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r)$ une base de $\mathrm{Im}(u)$; il existe donc $(e_1, \ldots, e_r)$ tels que $u(e_i) = \varepsilon_i$. On prouve alors la liberté de la famille $\mathcal{B} = (e_1, u(e_1), \ldots, e_r, u(e_r))$: si $\displaystyle\sum_{i=1}^{r} (\alpha_i e_i + \beta_i u(e_i)) = 0$, en composant par u et avec $u^2(e_i) = 0$, on a $\displaystyle\sum_{i=1}^{r} \alpha_i u(e_i) = 0$ donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \varepsilon_i = 0$ qui donne $\alpha_i = 0$ pour $i \in [\![1, r]\!]$ par liberté de $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r)$; il reste alors $\displaystyle\sum_{i=1}^{r} \beta_i u(e_i) = 0$ qui donne $\forall i \in [\![1, r]\!], \beta_i = 0$ pour la même raison. La famille $\mathcal{B}$ est donc une famille libre de $2r = \dim(E)$ vecteurs de E donc une $\boxed{\text{base de } E}$

b) Comme $\left\{\begin{array}{l} u(e_i)=u(e_i) \\ u(u(e_i))=0 \end{array}\right.$, on a $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)=\mathrm{diag}(J_2,\dots,J_2)\in\mathcal{M}_{2r}(\mathbb{C})}$

10. a) On reprend la construction et les notations précédentes mais cette fois $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_r)$ est une base de $\mathrm{Im}(u)$ donc une famille libre de $\ker(u)$ que l'on peut compléter par une famille de $n-2r$ vecteurs $(v_1,\dots,v_{n-2r})$ en une base de $\ker(u)$. La famille $\mathcal{B}=(e_1,u(e_1),\dots,e_r,u(e_r),v_1,\dots,v_{n-2r})$ est libre : si $\sum_{i=1}^{r}(\alpha_i e_i+\beta_i u(e_i))+\sum_{i=1}^{n-2r}\gamma_i v_i=0$, en composant par u, on a $\sum_{i=1}^{r}\alpha\varepsilon_i=0$ donc $\forall i\in[\![1,r]\!]\,,\alpha_i=0$; reste $\sum_{i=1}^{r}\beta_i\varepsilon_i+\sum_{i=1}^{n-2r}\gamma_i v_i=0$ donc on en déduit $\forall i\in[\![1,r]\!]\,,\beta_i=0$ et $\forall i\in[\![1,n-2r]\!]\,,\gamma_i=0$ par liberté de la famille $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_r,v_1,\dots,v_{n-2r})$. La famille $\mathcal{B}$ est donc libre, comporte $2r+n-2r=n$ vecteurs donc $\boxed{\mathcal{B}\text{ est une base de }E}$

b) Comme $\left\{\begin{array}{l} u(e_i)=u(e_i) \\ u(u(e_i))=0 \\ u(v_i)=0 \end{array}\right.$, on a $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)=\mathrm{diag}(\underbrace{J_2,\dots,J_2}_{r\text{ fois}},\underbrace{J_1,\dots,J_1}_{n-2r\text{ fois}})}$

11. On a $A^p=0$ donc $(\det(A))^p=0$ puis $\det(A)=0$ donc $\boxed{A\text{ n'est pas inversible}}$

12. a) Fait en cours !

b) On a alors (cf cours) $\ker(u^h)=\ker(u^{h+1})$ pour tout $h\geqslant k$; comme $\ker(u^{p-1})\neq E$ et $\ker(u^p)=E$, on a donc $p\leqslant k\leqslant n$. On a ensuite $u^n=u^p\circ u^{n-p}=0$

13. Si $P=X^pQ$ alors $P(A)=A^pQ(A)=0$ car $A^p=0$

14. Si $P=\sum_{k=0}^{d}a_kX^k$ avec $P(0)=a_0\neq 0$ alors $\sum_{k=1}^{d}a_kA^k=-a_0I_n$ donc $A\times\left(-\frac{1}{a_0}\sum_{k=1}^{d}a_kA^k\right)=I_n$ donc A serait inversible. Par contraposée, on en déduit $\boxed{P(0)=0}$

15. a) Par choix de x, on a $Q(u)(x)=0$ donc $u^{p-1}\circ Q(u)(x)=0$. Si on écrit Q sous la forme $Q=\sum_{k=0}^{d}a_kX^k$, alors on a $u^{p-1}\circ Q(u)(x)=\sum_{k=0}^{d}a_ku^{k+p-1}(x)=a_0u^{p-1}(x)$ car $u^{k+p-1}=0$ si $k\geqslant 1$. On a donc $a_0u^{p-1}(x)=0$ et $a_0=Q(0)\neq 0$ donc $\boxed{u^{p-1}(x)=0}$

b) On vient d'initialiser cette récurrence (pour $k=1$). Si on suppose $u^{p-i}(x)=0$ pour tout $i\in[\![1,k]\!]$ et $k\leqslant p-1$ fixé (récurrence forte) alors $Q(u)(x)=\sum_{j=0}^{p-k-1}a_ju^j(x)$ et $Q(u)(x)=0$ par choix de x. On compose alors par u^{p-k-1} (possible car $p-k-1\geqslant 0$) : on a donc $0=u^{p-k-1}\circ Q(u)(x)=\sum_{j=0}^{p-k-1}a_ju^{p-k-1+j}(x)=a_0u^{p-k-1}(x)$ car $u^{p-k-1+j}(x)=0$ si $j\geqslant 1$ par HR. Comme $a_0\neq 0$, on en déduit $u^{p-(k+1)}(x)=0$ ce qui termine cette récurrence.

c) Pour $k=p$, on en déduit $0=u^{p-p}(x)=id(x)=x$. On a donc $\ker(Q(u))=\{0\}$ et $\boxed{Q(A)\text{ est inversible}}$

d) On a $P(A)=0$ donc $A^mQ(A)=0$; comme $Q(A)$ est inversible, on en déduit $A^m=0$ donc $m\geqslant p$ par définition de l'indice de nilpotence. On a alors $P=X^p\times X^{m-p}Q$ donc $\boxed{P\text{ est multiple de }X^p}$

16. a) Si $R^2=B$ alors $BR=R^3=RB$ donc u et ρ commutent et $\boxed{\mathrm{Im}(u)\text{ et }\ker(u)\text{ sont stables par }\rho}$

$R^4=B^2=0$ donc $\boxed{\rho\text{ est nilpotent}}$

b) Si on note $B'=\mathrm{diag}(J_2,J_1)$, on a $R^2=B\Leftrightarrow(PR'P^{-1})^2=PB'P^{-1}\Leftrightarrow P(R')^2P^{-1}=PB'P^{-1}\Leftrightarrow(R')^2=B'$ car P est inversible. De plus R' est la matrice de ρ dans la base $\mathcal{B}=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$ avec $\varepsilon_2\in\mathrm{Im}(u)$, stable par ρ donc $\rho(\varepsilon_2)\in\mathrm{Im}(u)=\mathrm{Vect}\{\varepsilon_2\}$ et $\rho(\varepsilon_2)=\alpha\varepsilon_2$; de même, $\varepsilon_3\in\ker(u)$, qui est stable par ρ, donc $\rho(\varepsilon_3)\in\ker(u)=\mathrm{Vect}\{\varepsilon_2,\varepsilon_3\}$ et $\rho(\varepsilon_3)=\beta\varepsilon_2+\gamma\varepsilon_3$. Ainsi, R' est de la forme $R'=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & \alpha & \beta \\ c & 0 & \gamma \end{pmatrix}$. Pour une telle matrice R', on a $(R')^2=B'\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} a^2=\alpha^2=\gamma^2=0 \\ ab+b\alpha+c\beta=1 \\ ac+c\gamma=0 \\ \alpha\beta+\beta\gamma=0 \end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} a=\alpha=\gamma=0 \\ b\in\mathbb{C} \\ c\in\mathbb{C}^* \\ \beta=c^{-1} \end{array}\right.$. Les solutions sont donc les matrices $\boxed{R=P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & c^{-1} \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}\text{ avec }b\in\mathbb{C}\text{ et }c\in\mathbb{C}^*}$

17. Si $R^2 = J_3$ alors $R^4 = J_3^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $R^6 = J_3^3 = 0$ donc R serait nilpotente d'indice 5 ou 6 ce qui est absurde car $p \leqslant 3$ (d'après **C-12.b**). Ainsi $\boxed{R^2 = J_3 \text{ ne possède pas de solution}}$

18. a) Si $R^2 = V$ et V est nilpotente d'indice p alors $R^{2p} = V^p = 0$ donc R est nilpotente d'indice $q \leqslant 2p$ mais $R^{2(p-1)} = V^{p-1} \neq 0$ donc $q \geqslant 2(p-1)+1 = 2p-1$ (donc $q = 2p-1$ ou $q = 2p$). Comme, d'après **C-12.b**, $q \leqslant n$, si $2p-1 > n$, un tel entier q n'existe pas et $\boxed{R^2 = V \text{ n'a pas de solution}}$

b) D'après **D-15.b**, il existe $R \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telle que $R^2 = B$ donc si on pose $M = \operatorname{diag}(B, 0) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a $M^2 = 0$ car $B^2 = 0$ donc M est nilpotente d'indice $p = 2$. Si on pose $S = \operatorname{diag}(R, 0) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors $S^2 = M$ donc M possède au moins une racine carrée.

Partie III

1. On a $u(\operatorname{Im}(u)) \subset \operatorname{Im}(u)$ donc $\boxed{\operatorname{Im}(u) \text{ est stable par } u}$ De plus, si $y = u(x) \in \operatorname{Im}(u)$, on a $v^{p-1}(y) = u^p(x) = 0$ donc v est nilpotent d'indice $\leqslant p-1$. Comme u est nilpotent d'indice p, $u^{p-1} \neq 0$ donc il existe $x \in E$ tel que $u^{p-1}(x) \neq 0$; pour un tel x, on a $y = u(x) \in \operatorname{Im}(u)$ et $v^{p-2}(y) = u^{p-1}(x) \neq 0$ donc $v^{p-2} \neq 0$ et $\boxed{v \text{ est nilpotent d'indice } p-1}$

2. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $u\left(u^k(x)\right) = u^{k+1}(x) \in C_u(x)$ donc $\boxed{C_u(x) \text{ est stable par } u}$

Si on définit l'ensemble $I_x = \{k \in \mathbb{N}, u^k(x) = 0\}$, cet ensemble est une partie de $\mathbb{N}$, non vide car $p \in I_x$ donc I_x admet un plus petit élément $s(x)$. On a obligatoirement $s(x) \geqslant 1$ car sinon on aurait $0 = u^{s(x)}(x) = u^0(x) = id_E(x) = x$ ce qui est absurde.

3. On prouve par récurrence sur $k \in [\![1, s(x)]\!]$ que $(u^{s(x)-k}(x), u^{s(x)-k+1}(x), \dots, u^{s(x)-1}(x))$ est libre : pour $k = 0$, comme $u^{s(x)-1}x \neq 0$ par minimalité de $s(x)$, $(u^{s(x)-1}(x))$ est libre. Si on suppose $(u^{s(x)-k}(x), \dots, u^{s(x)-1}(x))$ libre pour $k \leqslant s(x)-1$ et si $\displaystyle\sum_{i=s(x)-k-1}^{s(x)-1} \alpha_i u^i(x) = 0$, en composant par u^k, on a $\alpha_{s(x)-k-1} u^{s(x)-1}(x) = 0$ car $u^{i+k}(x) = 0$ pour $i \geqslant s(x)-k$; comme $u^{s(x)-1}(x) \neq 0$, on en déduit $\alpha_{s(x)-k-1} = 0$; il reste alors $\displaystyle\sum_{i=s(x)-k}^{s(x)-1} \alpha_i u^i(x) = 0$ qui donne $\alpha_{s(x)-k} = \dots = \alpha_{s(x)-1} = 0$ par HR. Pour $k = s(x)$, on en conclut que $(x, u(x), \dots, u^{s(x)-1}(x))$ est une famille libre de $C_u(x)$.

On prouve maintenant que cette famille engendre $C_u(x)$: si $k \geqslant s(x)$ alors $u^k(x) = 0 \in \operatorname{Vect}\{x, \dots, u^{s(x)-1}(x)\}$ donc $\boxed{\mathcal{B}_x = (x, \dots, u^{s(x)-1}(x)) \text{ est une base de } C_u(x)}$ Par construction de cette base, on a $\boxed{\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_x}(w_x) = J_{s(x)}}$

4. Pour $p = 1$, on a $u = 0$ donc $C_u(x) = \operatorname{Vect}\{x\}$ pour tout vecteur $x \neq 0$. Il suffit donc de prendre une base $(x_1, \dots, x_n)$ de E et on a $E = \displaystyle\bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant n} C_u(x_i)$ donc le résultat est vrai.

On suppose que pour tout endomorphisme nilpotent d'indice $p-1$ d'un sous-espace F quelconque, une telle décomposition de F existe. On choisit alors u nilpotent d'indice p de E. D'après **III.1**, l'endomorphisme v induit par u sur $\operatorname{Im}(u)$ est nilpotent d'indice $p-1$; on peut donc lui appliquer l'HR : il existe $(y_1, \dots, y_t) \in \operatorname{Im}(u)^t$ tels que $\operatorname{Im}(u) = \displaystyle\bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant t} C_v(y_i)$. Comme $y_i \in \operatorname{Im}(u)$, il existe $x_i \in E$ tel que $y_i = u(x_i)$.

On commence alors par vérifier $s_u(x_i) = s_v(y_i) + 1$: $u^{s_v(y_i)+1}(x_i) = u^{s_v(y_i)}(y_i) = v^{s_v(y_i)}(y_i) = 0$ donc on a $s_u(x_i) \leqslant s_v(y_i) + 1$, puis $u^{s_v(y_i)}(x_i) = u^{s_v(y_i)-1}(y_i) = v^{s_v(y_i)-1}(y_i) \neq 0$ donc $s_u(x_i) = 1 + s_v(y_i)$ dont on déduit $\dim(C_u(x_i)) = 1 + \dim(C_v(y_i))$.

Les vecteurs $u^{s(x_i)-1}(x_i)$, $1 \leqslant i \leqslant t$ sont t vecteurs libres (car $u^{s(x_i)-1}(x_i) \neq 0$ et $u^{s(x_i)-1}(x_i) = u^{s(x_i)-2}(y_i) \in \mathbb{C}_v(y_i)$ car $s(x_i) \geqslant 2$ sinon on aurait $y_i = u(x_i) = 0$) de $\ker(u)$; on peut donc compléter cette famille libre par $z_1, \dots, z_q$ de façon à former une base de $\ker(u)$. Avec les notations précédentes, on a donc $\dim(\ker(u)) = t + q$. Comme $z_k \in \ker(u)$, on a $u(z_k) = 0$ donc $s(z_k) = 1$ et $C_u(z_k) = \operatorname{Vect}\{z_k\}$.

Reste à vérifier $E = \left(\displaystyle\bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant t} C_u(x_i)\right) \oplus \left(\displaystyle\bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant q} C_u(z_i)\right)$: si $x \in E$, on a $u(x) \in \operatorname{Im}(u) = \displaystyle\bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant t} C_v(y_i)$ donc $u(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{t} y'_i$ avec $y'_i \in C_u(y_i)$ donc $y'_i = \displaystyle\sum_{k=0}^{s(y_i)-1} \alpha_k u^k(y_i) = \sum_{k=0}^{s(y_i)-1} \alpha_k u^{k+1}(x_i)$; on en déduit qu'il existe $y''_i \in C_u(x_i)$ tel que $y'_i = u(y''_i)$. On pose alors $x' = x - \displaystyle\sum_{i=1}^{t} y''_i$. On a ainsi $u(x') = u(x) - \displaystyle\sum_{i=1}^{t} u(y''_i) = u(x) - \sum_{i=1}^{t} y'_i = 0$ donc $x' \in \ker(u) = \operatorname{Vect}\{u^{s(x_1)-1}(x_1), \dots, u^{s(x_t)-1}(x_t), z_1, \dots, z_q\}$.

On en déduit $x = x' + \displaystyle\sum_{i=1}^{t} y''_i \in \left(\sum_{1 \leqslant i \leqslant t} C_u(x_i)\right) + \left(\sum_{1 \leqslant i \leqslant q} C_u(z_i)\right)$ et $E = \left(\displaystyle\sum_{1 \leqslant i \leqslant t} C_u(x_i)\right) + \left(\sum_{1 \leqslant i \leqslant q} C_u(z_i)\right)$

Enfin, $\left(\sum_{1\leqslant i\leqslant t}\dim(C_u(x_i))\right)+\left(\sum_{1\leqslant i\leqslant q}\dim(C_u(z_i))\right)=\left(\sum_{1\leqslant i\leqslant t}(s(x_i)-1)\right)+\left(\sum_{1\leqslant i\leqslant q}1\right)=\dim(\mathrm{Im}(u))+q=\dim(E)$ ce qui prouve que la somme précédente est directe.

$$\boxed{E=\left(\bigoplus_{1\leqslant i\leqslant t}C_u(x_i)\right)\oplus\left(\bigoplus_{1\leqslant i\leqslant q}C_u(z_i)\right)}$$

5. On a $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)=\mathrm{diag}(J_{s(x_1)},\ldots,J_{s(x_t)})}$