TD4 : Algèbre linéaire

Exercice 1
Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer un polynôme annulateur de M de degré 2 puis M^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2 (CCP PSI 2017)

1. Montrer qu'il n'existe pas de polynôme annulateur non nul de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ de degré $\leqslant 2$.

2. Trouver un polynôme annulateur de A et en déduire A^{-1}.

3. Quels sont tous les polynômes annulateurs de A ? *(*)*

Exercice 3 (CCINP PSI 2018)
Soit f un endomorphisme de E pour lequel il existe un polynôme annulateur P tel que $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$. Montrer que $E = \ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$, d'abord en dimension finie puis en dimension quelconque. *(*)*

Exercice 4 (CCP PC 2007)
Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $u^n = id_E$. Soit V un sous-espace vectoriel de E stable par u et p un projecteur sur V. On pose $q = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u^k \circ p \circ u^{n-k}$.

1. Montrer que $q \circ u = u \circ q$.

2. Montrer que $\mathrm{Im}(q) \subset V$ puis que $p \circ q = q$.

3. Montrer que q est un projecteur et en déduire que $\mathrm{Im}(q) = V$.

4. Montrer que V possède un supplémentaire stable par u.

Exercice 5 (ENTPE-EIVP PC 2016)

1. Montrer que, si f et g sont deux endomorphismes vérifiant $f \circ g \circ f = f$, alors $f \circ g$ et $g \circ f$ sont des projecteurs.

2. Montrer que de plus $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f \circ g)$ et que $\ker(f) = \ker(g \circ f)$.

3. Montrer que si $f \circ g \circ f = f$ et $g \circ f \circ g = g$, alors $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(g)$.

4. Montrer réciproquement que si $f \circ g \circ f = f$ et $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(g)$ alors $g \circ f \circ g = g$. *(*)*

Exercice 6 (Mines-Ponts PSI 2018)
Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.
Montrer que $f \circ f = 0 \Leftrightarrow \exists (g,h) \in \mathcal{L}(E)^2, f = g \circ h$ et $h \circ g = 0$. *(*)*

Indications

Exercice 2

3. *en supposant que $Q(A) = 0$, écrire la division euclidienne de Q par P (le polynôme de Q2) puis vérifier que P divise Q.*

Exercice 3

En cas de difficulté, commencer par un cas particulier, en prenant $P = 2X - X^3 + 4X^4$ par exemple.

Exercice 5

4. *Utiliser la décomposition de E donnée par la première question et vérifier que* $\ker(f \circ g) = \ker(g)$.

Exercice 6

Pour le sens direct, commencer par vérifier que $\mathrm{Im}(f) \subset \ker(f)$ *puis introduire une base $\mathcal{B}$ de E en complétant une base de* $\mathrm{Im}(f)$ *en une base de* $\ker(f)$ *puis en une base de E ; chercher ensuite g et h en déterminant leurs matrices dans $\mathcal{B}$ (il y a bcp de possibilités).*