TD5 : Algèbre linéaire

Exercice 1 **(CCP PSI 2018)**
Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $\Delta_A = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), M + M^T = \mathrm{Tr}(M)A\}$, $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n$ celui des matrices antisymétriques.

1. Montrer que Δ_A est un espace vectoriel.
2. Si $\mathrm{Tr}(A) \neq 2$, montrer que $\Delta_A = \mathcal{A}_n$. *(*)*
3. Déterminer Δ_A si $\mathrm{Tr}(A) = 2$ et $A \notin \mathcal{S}_n$. *(*)*
4. Si $A \in \mathcal{S}_n$ et $\mathrm{Tr}(A) = 2$, déterminer $\Delta_A \cap \mathcal{S}_n$ et en déduire Δ_A. *(*)*

Exercice 2 **(CCINP PSI 2018)**
Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $f(M) = M + \mathrm{Tr}(M)A$.

1. Trouver un polynôme annulateur de f. *(*)*
2. Montrer que f est bijectif dès que $\mathrm{Tr}(A) \neq -1$.
3. On suppose $\mathrm{Tr}(A) = -1$. Donner $\ker(f)$ et montrer que $\mathrm{Im}(f)$ est l'ensemble des matrices de trace nulle.
4. Résoudre l'équation $X + (\mathrm{Tr}\, X)A = B$ d'inconnue X.

Exercice 3 **(CCP PSI 2016)**
On pose $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ avec $m_{i,j} = \begin{cases} b & \text{si } j > i \\ a & \text{si } i > j \\ r_i & \text{si } i = j \end{cases}$ où $(r_1, \ldots, r_n) \in \mathbb{K}^n$ et on note J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1.

1. Montrer que $x \mapsto \det(M + xJ)$ est une fonction affine (polynômiale de degré $\leqslant 1$). *(*)*
2. En déduire, lorsque $a \neq b$, la valeur de $\det(M + xJ)$ puis de $\det(M)$. *(*)*

Exercice 4 **(Mines-Ponts PSI 2013)**
Soit $D_n(x)$ le déterminant de la matrice ayant des $1+x^2$ sur la diagonale, des x juste au dessus et en dessous (si $|i-j| = 1$) et des 0 partout ailleurs. Trouver une relation entre $D_{n+2}(x)$, $D_{n+1}(x)$ et $D_n(x)$ *(*)* et calculer $D_n(x)$.

Exercice 5 **(Mines-Ponts PSI 2024)**

1. Soient E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie et H un sous espace vectoriel de E. Montrer que H est un hyperplan si et seulement si il existe une forme linéaire non nulle ℓ telle que $H = \ker(\ell)$
2. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit $\phi_A : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longmapsto \mathrm{Tr}(AM)$. Montrer que $\phi : A \longmapsto \phi_A$ est un isomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R})$
3. On pose $C = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & (0) & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ (0) & & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. C est-elle inversible ?
   Calculer $\mathrm{Tr}(J_r C)$
4. En déduire que tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ contient une matrice inversible

---

Indications

Exercice 1

2. *en supposant que $M \in \Delta_A$, commencer par déterminer $\mathrm{Tr}(M)$.*
3. *transposer l'équation pour en obtenir une seconde.*
4. *commencer par remarquer que $\Delta_A \cap \mathcal{S}_n$ est inclus dans une droite.*

Exercice 2

1. *de degré 2 ; ne pas confondre un polynôme annulateur de f et de de $f(M)$.*

Exercice 3

1. *par manipulation sur les rangées, éliminer tous les termes x sauf 1 ; il ne s'agit pas de déterminer précisément les coefficients de ce polynôme pour le moment.*
2. *on a $\forall x \in \mathbb{R}, \det(M + xJ) = \alpha x + \beta$ donc deux inconnues α et β que l'on peut déterminer si on trouve deux valeurs de x pour lesquelles $\det(M + xJ)$ est facile à calculer.*

Exercice 4

Développer directement par la première colonne par exemple.