PSI2. devoir en classe n°4. 4h . Samedi 11 janvier 2025.

Calculatrices autorisées. Téléphones portables interdits.
Rangement final dans l'ordre de l'énoncé.
Numérotez vos feuilles de 1/n à n/n.
Proposition de solution sur le cahier dimanche soir. J'achève pendant la surveillance.

Les problèmes font partie du problème.

Pb1.Extrait Centrale tsi.

II.A – Cavité résonante électromagnétique

On considère une cavité électromagnétique vide de charges et de courants électriques, délimitée par un conducteur parfait qui occupe le demi-espace $x < 0$ et un autre conducteur parfait qui occupe de le demi-espace $x > L$.

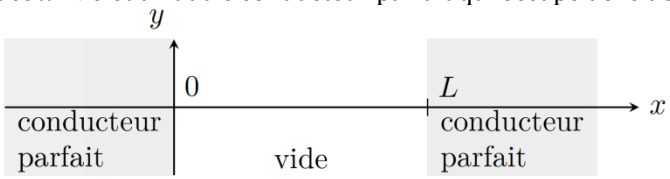

Figure 16 Cavité résonnante électromagnétique

Q49. Rappeler et nommer les équations de Maxwell dans leur forme générale. Écrire ensuite ces mêmes équations dans un milieu vide de charges et de courants électriques.

Q50. À l'aide du formulaire disponible en fin d'énoncé, établir l'équation aux dérivées partielles suivante vérifiée par le champ électrique $\vec{E}(M,t)$ en tout point M à l'intérieur de la cavité :

$$\Delta\vec{E}(M,t) - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}(M,t)}{\partial t^2} = \vec{0} \qquad \text{(II. 1)}$$

Rappeler le nom donné usuellement à cette équation.

Le champ électrique

$$\overrightarrow{E_i}(x,t) = E_0\cos(\omega t - kx)\,\overrightarrow{e_y} \qquad \text{(II. 2)}$$

où E_0, ω et k sont des constantes indépendantes de x et de t, et où $\overrightarrow{e_y}$ est un vecteur unitaire orienté selon l'axe (Oy), constitue une solution de l'équation II.1.

Q51. Attribuer quatre qualificatifs à la solution proposée en les justifiant.

Q52. Exploiter l'équation II.1 pour établir la relation $k = \omega/c$ où c est à définir en fonction de ε_0 *et* μ_0

On admet que le champ électrique dans un conducteur parfait est nul en tout point et à tout instant.

Q53. On considère une solution de l'équation II.1 sous la forme du champ électrique donné par l'équation II.2. Montrer que les relations de passage pour le champ électrique en $x = 0$ et $x = L$ imposent $E_0 = 0$.

On considère dorénavant une solution de l'équation II.1 sous la forme suivante :

$$\overrightarrow{E_i}(x,t) = 2E_0\sin(\omega t)\sin(kx)\ \overrightarrow{e_y} \qquad \text{(II. 3)}$$

Où E_0 est une constante non nulle et $k = \omega/c$.

Q54. Rappeler le qualificatif donné à l'onde associée à l'expression II.3.

Q55. Montrer que cette solution vérifie la relation de passage pour le champ électrique en $x = 0$ à tout instant t.

Q56. Montrer que la relation de passage pour le champ électrique en $x = L$ impose à k et à ω des valeurs discrètes. En déduire la relation $L = n\lambda/2$ où n est un entier naturel non nul et $\lambda = 2\pi/k$ est la longueur d'onde de l'onde électromagnétique.

Relations de passage pour le champ électrique

En un point M :

$$\vec{E}(M^+,t)-\vec{E}(M^-,t)=\frac{\sigma(M,t)}{\varepsilon_0}\vec{n}_{M^-\to M^+},$$

avec $\sigma(M,t)$ la charge surfacique en M à l'instant t et $\vec{n}_{M^-\to M^+}$ un vecteur unitaire orienté de M^- vers M^+.

Analyse vectorielle

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{A})\right)=\overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\mathrm{div}(\vec{A})\right)-\Delta\vec{A}$$

Pb2.Centrale psi. II Étude d'un modèle gravimétrique de la Terre

II. A - Préliminaire : l'analogie électrostatique-gravitation

Q 16. En utilisant l'analogie entre le champ électrostatique et le champ gravitationnel, montrer que ce dernier, noté $\vec{\mathcal{G}}$, vérifie l'équation locale $\mathrm{div}\vec{\mathcal{G}}=-4\pi G\mu$ où G est la constante universelle de gravitation et μ la masse volumique locale. En déduire l'énoncé du théorème de Gauss de la gravitation (analogue du théorème de Gauss de l'électromagnétisme).

II.B - Un premier modèle gravimétrique fruste de la Terre

Dans ce premier modèle, on assimile la Terre à une boule T_h de centre O, de rayon R_T et de masse M_T uniformément répartie en volume. Celle-ci est à l'origine d'un champ gravitationnel noté $\mathcal{G}_{T_\mathrm{h}}$. On note μ_0 la masse volumique moyenne de la Terre (qui s'identifie ici à la masse volumique en chacun de ses points).

Q 17. Déterminer le champ gravitationnel $\vec{\mathcal{G}}_{T_\mathrm{h}}$ en tout point de l'espace en introduisant un système de coordonnées adapté.

Q 18. Tracer sa norme en fonction de la distance r au centre O.

Q 19. Calculer sa valeur $\mathcal{G}_0$ à la surface de la Terre.

II. C - Un second modèle gravimétrique (noyau + manteau) de la Terre

Le modèle précédent est fruste puisqu'il ne tient pas assez compte de la structure interne de la Terre. On rencontre dans la littérature un second modèle, où la Terre est toujours assimilée à une boule de centre O et de rayon R_T avec une répartition de masse à symétrie sphérique de centre O; mais cette répartition est cette fois-ci inhomogène de sorte que la norme $\mathcal{G}_T$ du champ gravitationnel interne en fonction de la distance r au centre O présente l'allure précisée à la figure 4 .

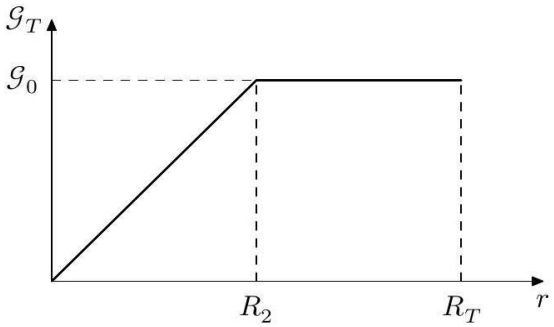

Figure 4 Champ de gravitation terrestre à l'intérieur de la Terre pour un modèle (noyau + manteau).

On distingue deux parties dans ce modèle (noyau + manteau) : la discontinuité de Gutenberg correspond à la distance $r=R_2$.

On note toujours μ_0 la masse volumique moyenne de la Terre.

Q 20. Justifier que la valeur de $\mathcal{G}_0$ à la surface de la Terre dans le cadre de ce modèle est inchangée par rapport à celle évaluée à la question Q 19.

Q 21. Déterminer la distribution de masse volumique $\mu(r)$ pour la Terre dans ce modèle. L'exprimer en fonction de R_T, R_2 et μ_0 dans le noyau et en fonction de R_T, M_T et r dans le manteau.

Q 22. Tracer l'allure de cette distribution de masse volumique $\mu(r)$ en précisant les valeurs numériques remarquables.

Formulaire et données

Formulaire

Le gradient en coordonnées sphériques s'écrit:

$$\overrightarrow{\text{grad}}\xi = \frac{\partial \xi}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial \xi}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\,\theta}\frac{\partial \xi}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi$$

La divergence en coordonnées sphériques s'écrit:

$$\text{div}\vec{a} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 a_r) + \frac{1}{r\sin\,\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(a_\theta \sin\,\theta) + \frac{1}{r\sin\,\theta}\frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi}$$

Données

Constante universelle de gravitation $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \text{m}^3 \cdot\ \text{kg}^{-1} \cdot\ \text{s}^{-2}$

Rayon de la Terre $R_T = 6371\ \text{km}$

Masse de la Terre $M_T = 5{,}972 \times 10^{24}\ \text{kg}$

Pb3.Extrait modifié Centrale mp.

QP. *Soit la distribution de courant suivante :* $\vec{j} = j_o\vec{e}_y$, j_o *constante dans l'espace compris entre* $x = -a/2$ *et* $x = +a/2$.

a)Montrer que le champ magnétique en M(x,y,z) peut s'écrire : $\vec{B}(M) = B(x)\vec{e}_z$ *avec B(0)=0. Peut-on préciser la parité de la fonction B(x) ?*

b)Calculer le champ magnétique en tout point par la relation MA et tracer la fonction B(x).

III.B - Interaction champs - plasma dans la torche

On repère un point de l'espace par ses coordonnées cartésiennes (x, y, z) dans une base orthonormée directe $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Le plasma est un gaz composé d'ions supposés fixes et d'électrons mobiles. Il est localement neutre dans tout le domaine $-a < x < a$ qu'il occupe et où sa densité électronique n est uniforme et constante.

Le domaine du plasma est délimité par deux lames planes identiques (épaisseur b) qui modélisent le bobinage inducteur haute fréquence. La lame de droite est parcourue par un vecteur densité de courant électrique uniforme $J(t)\vec{e}_y$ et celle de gauche par le vecteur opposé $-J(t)\vec{e}_y$ (figure 10). On néglige les effets de bords selon les directions y et z.

On admet dans toute la suite que les fréquences de travail sont suffisamment faibles pour se placer dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires magnétique. Cette hypothèse permet d'écrire les équations de Maxwell sous la forme approchée suivante:

$$\mathrm{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \qquad \overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \qquad \mathrm{div}\vec{B} = 0, \qquad \overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{B} = \mu_0\vec{j}$$

Q 28. Donner, sans démonstration, l'expression, sous forme intégrale, des quatre équations de Maxwell écrites ci-dessus dans une formulation locale. On pourra se servir des théorèmes de Gauss et d'Ampère comme référence.

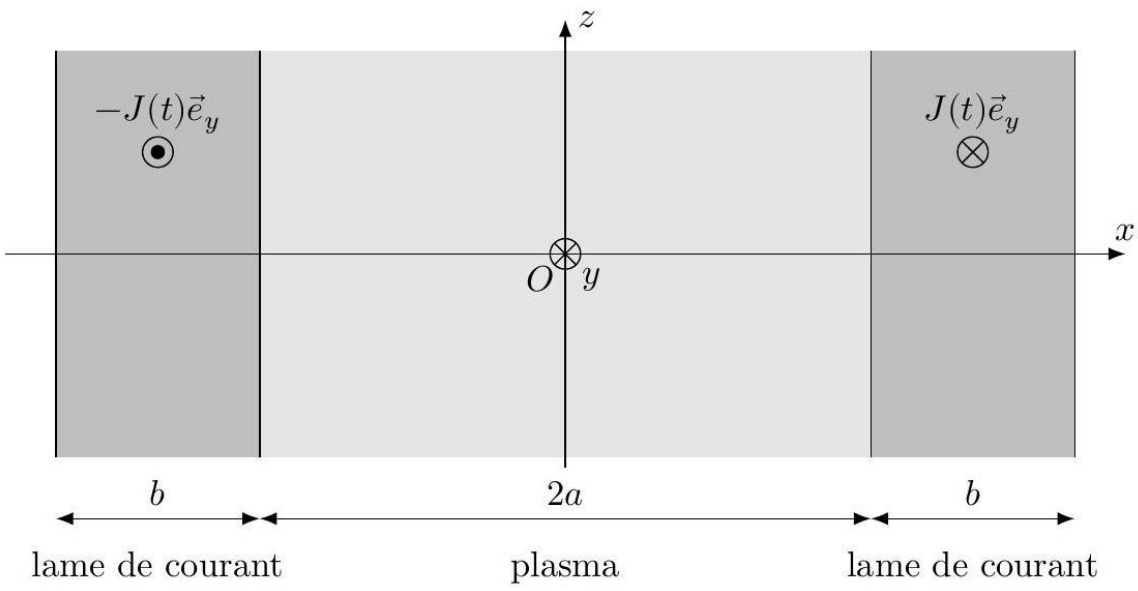

Figure 10

III.B.1) Champ magnétique produit par les lames

Q 29. Déterminer, en utilisant QP, le champ magnétique produit dans tout l'espace uniquement par la lame de gauche (on ne tiendra donc pas compte de l'autre lame et du plasma). Tracer sur un premier dessin le profil du champ .

Q 30. Tracer sur un second dessin le profil du champ magnétique créé par la seconde lame de courant. Tracer sur un troisième dessin le profil du champ total.

III.B.2) Propriétés dans le plasma

Q 31. Expliquer qualitativement pourquoi il peut exister dans le plasma un champ électrique dû aux courants dans les lames. Montrer qu'il s'écrit sous la forme $\vec{E}(M,t) = E(x,t)\vec{e}_y$ et justifier que $E(x,t)$ est une fonction impaire de la variable x.

Q 32. Le champ magnétique qui règne dans le plasma ne correspond pas à celui produit par les lames calculé précédemment. Expliquer qualitativement pourquoi. Montrer qu'il s'écrit sous la forme $\vec{B}(M,t) = B(x,t)\vec{e}_z$ et justifier que $B(x,t)$ est une fonction paire de la variable x.

Q 33. Le vecteur densité de courant électrique dans le plasma s'écrit $\vec{j}(x,t) = j(x,t)\vec{e}_y$. Expliciter, d'une part, l'équation aux dérivées partielles reliant $E(x,t)$ et $B(x,t)$ et, d'autre part, celle reliant $B(x,t)$ et $j(x,t)$.

À ce stade, il manque une loi de réponse du plasma (c'est-à-dire une relation liant $\vec{j}(x,t)$ et $\vec{E}(x,t)$) afin d'accéder aux profils des divers champs en son sein. On souhaite répondre à ce manque en utilisant tour à tour deux modèles très différents. Il s'agit de voir lequel des deux est le plus acceptable pour comprendre ce qu'il se passe dans une torche à plasma dans notre approche simplifiée.

III.B.3) Modèle non collisionnel

Dans ce premier modèle, on néglige les collisions dans le plasma ainsi que la force magnétique. Les électrons, de densité volumique n uniforme et constante, de masse m et de charge $-e$, sont non relativistes et la seule force qui agit sur eux est d'origine électrique. Le vecteur densité de courant électrique $\vec{j}(x,t)$ et le champ électrique $\vec{E}(x,t)$ sont alors liés par la relation différentielle suivante :

$$\frac{\partial \vec{j}(x,t)}{\partial t} = \frac{ne^2}{m}\vec{E}(x,t)$$

Q 34. Montrer que $E(x,t)$ est solution de $\frac{\partial^2 E(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{\lambda^2}E(x,t) = 0$ où λ est une grandeur à déterminer en fonction des données. Vérifier que l'expression de λ lui confère une dimension cohérente avec celle attendue au regard de l'équation différentielle précédente.

Q 35. Obtenir la forme générale de $E(x,t)$. En déduire que $B(x,t) = \frac{\cosh(x/\lambda)}{\cosh(a/\lambda)}B_0(t)$ en posant $B_0(t) = B(a,t)$. On ne tiendra pas compte de tout champ magnétique statique.

Q 36. Déterminer $E(x,t)$ et $j(x,t)$ en fonction de $x, a, \mu_0, \lambda, B_0(t)$ et $\mathrm{d}B_0(t)/\mathrm{d}t$.

Q 37. Rappeler l'expression de la puissance volumique cédée par le champ électromagnétique aux électrons et l'exprimer en fonction des données du problème. Que vaut-elle en moyenne sachant que l'excitation par le bobinage d'induction haute fréquence est périodique? Peut-on transférer de l'énergie du bobinage vers le plasma ?

Pb4.Extrait Mines Ponts psi.

Industrie de l'extraction de l'uranium

L'uranium est un élément chimique découvert en 1789 à partir de roches provenant d'un gisement en République Tchèque. Nommé en l'honneur de la planète Uranus, il fut isolé pour la première fois en 1841 par le chimiste EugèneMelchior Péligot. [1] L'uranium naturel est composé de trois principaux isotopes : ^{238}U, ^{235}U et ^{234}U. Avec l'essor du nucléaire dans la production d'électricité, l'industrie de l'extraction de l'uranium et du traitement du minerai d'uranium a connu un développement exceptionnel. Cette activité, qui était pratiquement inexistante jusqu'au début des années 1940 (l'uranium n'était alors qu'un sousproduit des industries du vanadium et du radium), est devenue une grande industrie hydrométallurgique : aucune branche du traitement des minerais n'a connu un développement aussi rapide jusqu'à nos jours.

Nous allons aborder une partie des différentes étapes de l'industrie de l'uranium permettant d'obtenir du combustible nucléaire, utilisé dans les centrales, à partir du minerai d'uranium (Figure 1).

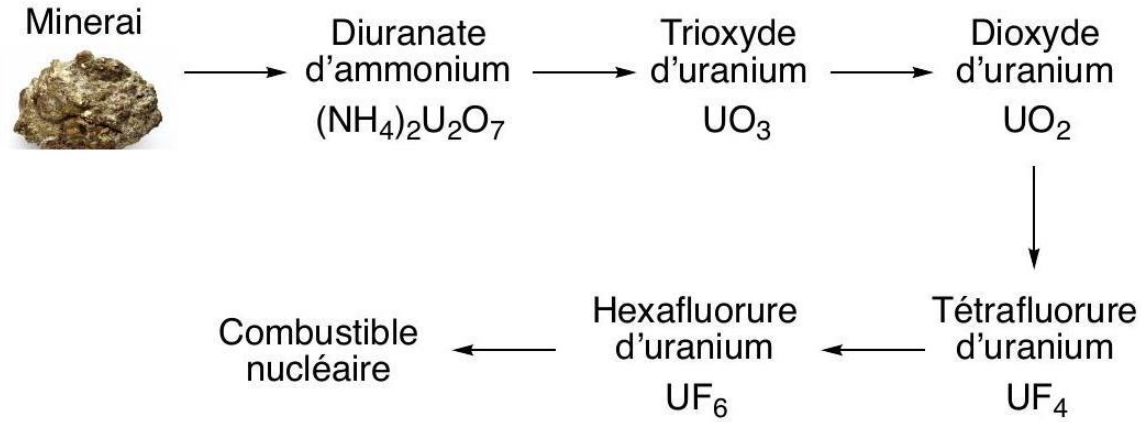

Figure 1. Production du combustible nucléaire d'uranium.

Obtention du trioxyde d'uranium

Le minerai uranifère est dissous dans de l'acide nitrique, et une oxydation en ion U(VI) est réalisée, permettant l'obtention des ions uranyle UO_2^{2+}. Il est intéressant à ce stade de titrer les ions uranyle obtenus afin de contrôler la quantité d'uranium extraite du minerai (Document 1).

Document 1. Titrage des ions uranyles UO_2^{2+}.

Étape 1. À une solution contenant de 1 à 25 mg de sel d'uranyle dans 20 mL d'acide sulfurique à 2 mol $\cdot$ L^{-1}, sont ajoutées quelques gouttes d'une solution de phénosafranine à 0,025% (indicateur d'oxydoréduction dont la forme réduite est incolore et la forme oxydée rouge).

Une solution de Cr(II) (préparée juste avant l'emploi par réduction d'une solution de chlorure de chrome(III) à 0,5 mol $\cdot$ L^{-1} par de l'amalgame de zinc en présence d'acide chlorhydrique à 0,1 mol $\cdot$ L^{-1}) est ajoutée goutte à goutte jusqu'au virage de l'indicateur du rouge à l'incolore, puis un léger excès est ajouté.

Étape 2. Pendant quelques instants, de l'air est mis à barboter jusqu'au nouveau virage au rouge de l'indicateur.
Étape 3. Enfin un dosage par une solution de permanganate de potassium est réalisé.

Afin de pouvoir étudier le principe de ce dosage, il est tout d'abord nécessaire d'analyser les diagrammes $E - pH$ de l'uranium et du chrome (Figure 2).

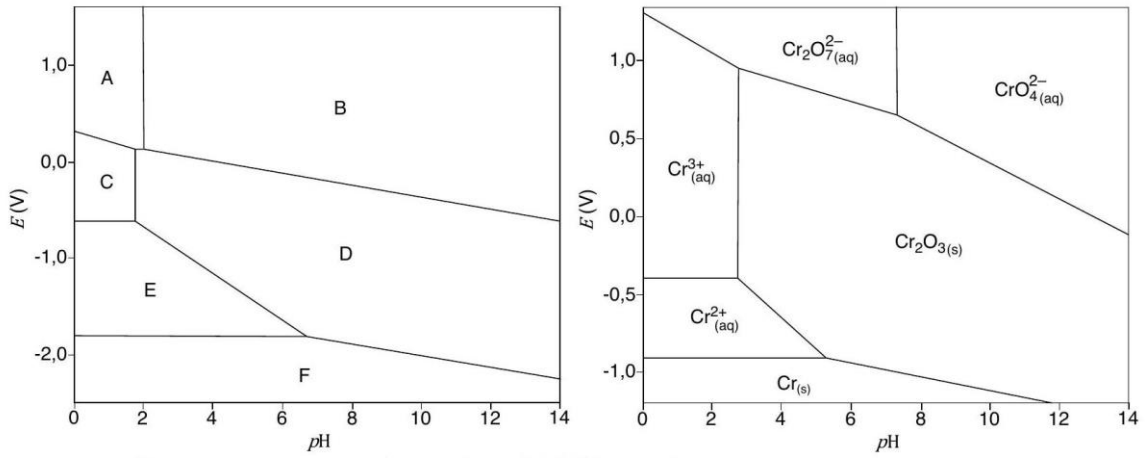

Figure 2. Diagrammes E-pH de l'uranium (gauche) et du chrome (droite).

Les diagrammes ont été tracés à 298 K en solution aqueuse, en prenant aux frontières les concentrations des espèces en solution égales à 1 mol $\cdot$ L^{-1} et en se limitant aux espèces suivantes pour l'uranium : $U_{(s)}$, $U_{(aq)}^{3+}$, $U_{(aq)}^{4+}$, $UO_{2\ (aq)}^{2+}$, $U(OH)_{3(s)}$, $U(OH)_{4(s)}$, $UO_2(OH)_{2(s)}$.

Q6- Pour le diagramme $E - pH$ de l'uranium, attribuer les différents domaines de prédominance ou d'existence (numérotés de A à F, Figure 2) parmi les différentes espèces considérées. Justifier.
Q7- À l'aide de la formule de Nernst, calculer la pente de la frontière entre les domaines A et C .
Q8- Déterminer les pH des frontières A/B et C/D à partir d'un calcul fondé sur des valeurs de constantes thermodynamiques.

Q9- À la lecture des deux diagrammes E - pH (Figure 2), quelles sont les espèces chimiques obtenues à partir des ions uranyle et des ions chrome(II) lors de l'étape 1 du protocole de dosage ? (Document 1 ; aucune équation de réaction n'est demandée en guise de justification)

Il faut ensuite éliminer les ions chrome(II) versés en excès, ce qui est fait lors de l'étape 2 grâce au dioxygène de l'air (Document 1).

Q10- Quelle transformation subissent les ions chrome(II) au cours de cette étape (aucune équation de réaction n'est demandée) ?

Q11- Écrire la réaction de titrage qui a lieu lors de l'étape 3 (Document 1), en considérant que les ions chrome ne sont pas impliqués.

Q12- Calculer la constante d'équilibre thermodynamique $K°$ de cette réaction à 25°C.

Une fois le dosage réalisé, des étapes de purification peuvent avoir lieu : une extraction avec un solvant ou une résine échangeuse d'ions, concentration puis précipitation du diuranate d'ammonium $(NH_4)_2U_2O_7$ par addition d'ammoniac NH_3. La calcination du diuranate d'ammonium produit le trioxyde d'uranium.

Q13- Proposer une équation de réaction modélisant la calcination du diuranate d'ammonium, sachant que de l'ammoniac est également formé.

Annexes

Annexe 1. Constantes usuelles et approximations de calculs.

Constanted'Avogadro: $\mathcal{N}_A \approx 6.10^{23}$ mol^{-1}.

Constante des gaz parfaits : $R \approx 8\,\mathrm{J}\cdot\,\mathrm{K}^{-1}\cdot\,\mathrm{mol}^{-1}$.

Annexe 4. Potentiels standard d'oxydoréduction à 25°C.

MnO_4^-/Mn^{2+}: $E^o = 1{,}5$ V;
U^{3+}/U: $E° = -1{,}8$ V;
U^{4+}/U^{3+}: $E° = -0{,}6$ V;
UO_2^{2+}/U^{4+}: $E° = 0{,}3$ V.

Annexe 5. Produits de solubilité à 25°C.

$U(OH)_3$: $pK_s = 19$; associée à $U(OH)_3 = U^{3+} + 3\,OH^-$
$U(OH)_4$: $pK_s = 49$; il ne reste plus qu'à généraliser

$UO_2(OH)_2$: $pK_S = 24$.

***Annexe 6**. Données thermodynamiques (considérées indépendantes de la température).*

Espèce	$N_{2\,(g)}$	NH_3 (g)	$HF_{(g)}$	$H_2O_{(g)}$	UO_2 (s)	UO_3 (s)	UF_4 (s)
$\Delta_f H^\circ$ (kJ·mol^{-1})	0	–47	–270	–240	–1100	–1200	–1900
S_m° (J·mol^{-1}·K^{-1})	190	190	170	190	80	100	150

J'ai laissé l'annexe 6 telle quelle. A vous de voir le gros piège…