

Partie A :

- Il existe φ tel que $-u = \varphi \circ u \circ \varphi^{-1}$ donc $-\text{Tr}(u) = \text{Tr}(\varphi \circ (u \circ \varphi^{-1})) = \text{Tr}((u \circ \varphi^{-1}) \circ \varphi) = \text{Tr}(u)$ et $\boxed{\text{Tr}(u) = 0}$
- La matrice de u dans une base $\mathcal{B}$ de E est de la forme $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$; on a alors $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & 0 \\ 0 & a^2 + bc \end{pmatrix} = \delta^2 I_2$ car $\det(u) = -(a^2 + bc)$.
Soit $x \in E$, on suppose que x peut se décomposer sous la forme $x = y + z$ avec $u(y) = \delta y$ et $u(z) = -\delta z$; on a alors $u(x) = \delta(y - z)$ donc $y = \frac{1}{2\delta}(\delta x + u(x))$ et $z = \frac{1}{2\delta}(\delta x - u(x))$, car $\delta \neq 0$. La décomposition de x est donc unique si elle existe. Pour $x \in E$, on pose $y = \frac{1}{2\delta}(\delta x + u(x))$ et $z = \frac{1}{2\delta}(\delta x - u(x))$ et on vérifie $y + z = x$, puis $u(y) = \frac{1}{2\delta}(\delta u(x) + u^2(x)) = \frac{1}{2\delta}(\delta u(x) + \delta^2 x) = \frac{1}{2}(\delta x + u(x)) = \delta y$ donc $y \in \ker(u - \delta id)$, et enfin $u(z) = \frac{1}{2\delta}(\delta u(x) - u^2(x)) = \frac{1}{2\delta}(\delta x - \delta^2 x) = -\frac{1}{2}(\delta x - u(x)) = -\delta z$ donc $z \in \ker(u + \delta id)$. On en déduit $\boxed{E = \ker(u - \delta id) \oplus \ker(u + \delta id)}$
Comme $\dim(E) = 2$, on a $\dim(\ker(u - \delta id)) \in \{0, 1, 2\}$. Si $\dim(\ker(u - \delta id)) = 2 = \dim(E)$ alors $u - \delta id = 0$ donc $u = \delta id$; on aurait alors $\text{Tr}(u) = 2\delta$ donc $\delta = 0$ puis $\det(u) = 0$ ce qui est absurde. De la même façon, si on avait $\dim(\ker(u - \delta id)) = 0$, on aurait $\dim(\ker(u + \delta id)) = 2$ et on conclurait de même $u = -\delta id$ qui est absurde aussi. On en déduit $\boxed{\dim(\ker(u - \delta id)) = \dim(\ker(u + \delta id)) = 1}$
- Soient $e = x_+ + x_-$ et $D = \text{Vect}\{e\}$; comme x_+ et x_- sont non nuls et appartiennent à deux espaces en somme directe, (x_+, x_-) est une famille libre et $e \neq 0$ donc D est une droite. De plus $u(e) = \delta(x_+ - x_-)$ n'est pas colinéaire à e : si on avait $u(e) = \lambda e$, on aurait $\delta(x_+ + x_-) = \lambda(x_+ + x_-)$ donc, par liberté de (x_+, x_-) , $\begin{cases} \delta = \lambda \\ \delta = -\lambda \end{cases}$ donc $\delta = 0$ ce qui est absurde. On a donc $e \in D$ et $u(e) \notin D$ donc $\boxed{u(D) \not\subset D}$
On vient en fait de justifier que $(e, u(e))$ est une famille libre de E donc une base de E puisque $\dim(E) = 2$. On pose alors $D = \text{Vect}\{e\}$ et $D' = \text{Vect}\{u(e)\}$. On a prouvé $u(e) \notin D$ (sinon on aurait $u(e) \in D$) donc D' est aussi une droite et comme $(e, u(e))$ est une base de E , on a $E = D \oplus D'$. Par définition de D' , on a bien $u(D) \subset D'$ et comme $u(u(e)) = u^2(e) = \delta^2 e \in D$, on a aussi $u(D') \subset D$. On a donc bien prouvé que $\boxed{u \text{ est échangeur}}$

Partie B :

- $\begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = 0$ et $M = \begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A & 0 \end{pmatrix}$ avec $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A & 0 \end{pmatrix}^2 = 0$ donc $\boxed{M \text{ est somme de deux matrices de carré nul}}$
- On a $\det(D) = (-1)^p \neq 0$ donc D est inversible et on vérifie $D^2 = I_{n+p}$ donc $D^{-1} = D$. On a alors $DMD^{-1} = -M$ donc $\boxed{M \text{ et } -M \text{ sont semblables}}$
- On a $u(f_i) \in G = \text{Vect}\{g_1, \dots, g_p\}$ et $u(g_j) \in F = \text{Vect}\{f_1, \dots, f_n\}$ donc la matrice de u dans $\mathcal{B}$ est de la forme $\boxed{\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & B \\ A & 0 \end{pmatrix}}$
- Si u vérifie (C1) avec F et G non nuls, on vient de voir que la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme de la matrice M de la question 1 donc u vérifie (C2) d'après 1 et (C2) d'après 2.
Si on suppose $G = \{0\}$ alors on a $E = F$ et pour tout $x \in E$, on a $u(x) \in G = \{0\}$ donc $u = 0$. On a alors $u = -u$ donc u vérifie (C2) et $u = 0 + 0$ avec $0^2 = 0$ donc u vérifie (C3). On conclut de même si $F = \{0\}$.

Partie C :

- Si $f^2 = 0$ alors on a $\text{Im}(f) \subset \ker(f)$: en effet, si $y \in \text{Im}(f)$ alors il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$ et on a alors $f(y) = f^2(x) = 0$ donc $y \in \ker(f)$.
Le théorème du rang donne $\dim(\ker(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = \dim(E)$ et, comme $\text{Im}(f) \subset \ker(f)$, on a $\dim(\text{Im}(f)) \leq \dim(\ker(f))$ donc $\boxed{\dim(E) \leq 2 \dim(\ker(f))}$
- Soit $x \in \ker(a) \cap \ker(b)$, on a $a(x) = b(x) = 0$ donc $u(x) = 0$, ce qui donne $x = 0$ par injectivité de u . On a donc $\ker(a) \cap \ker(b) = \{0\}$. Puis $\dim(\ker(a) \oplus \ker(b)) = \dim(\ker(a)) + \dim(\ker(b)) \geq \frac{1}{2} \dim(E) + \frac{1}{2} \dim(E)$ donc $\dim(\ker(a) \oplus \ker(b)) = \dim(E)$ donc $\boxed{E = \ker(a) \oplus \ker(b)}$
Vu que les inégalités précédentes sont en fait des égalités, on a en fait $\dim(\ker(a)) = \frac{1}{2} \dim(E)$ donc le théorème du rang donne aussi $\dim(\text{Im}(a)) = \frac{1}{2} \dim(E)$ (et $\dim(E)$ est alors paire). Comme $\text{Im}(a) \subset \ker(a)$, l'égalité des dimensions donne $\boxed{\ker(a) = \text{Im}(a)}$ puis $\ker(b) = \text{Im}(b)$ de la même façon.

3. On pose $F = \ker(a)$ et $G = \ker(b)$. On a bien $E = F \oplus G$; si $x \in F$ alors $u(x) = a(x) + b(x) = b(x) \in \operatorname{Im}(b) = \ker(b) = G$ et si $x \in G$ alors $u(x) = a(x) \in \operatorname{Im}(a) = F$. On conclut donc que u est échangeur