

Dans cet exercice, on note g la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par

$$\forall t > 0, g(t) = \frac{\ln(t)}{t} e^t$$

et on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par

$$\forall x > 0, f(x) = \int_1^x g(t) dt = \int_1^x \frac{\ln(t)}{t} e^t dt$$

1. Le graphe de f

- Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, préciser la valeur de $f'(x)$ et les variations de f sur $\mathbb{R}^{+*}$.
- Justifier que si $t \in]0, 1]$, on a $g(t) \leq \frac{\ln(t)}{t}$.
Calculer $\int_1^x \frac{1}{t} \times \ln(t) dt$ et en déduire que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$.
- Montrer que, pour $t \geq 0$, on a $e^t \geq t$ et en déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
- Tracer l'allure du graphe de f sur $\mathbb{R}^{+*}$.

2. Des équivalents de f

- Quelle est la limite, quand t tend vers 0, de $g(t) - \frac{\ln(t)}{t}(1+t)$?
En déduire que $\left[f(x) - \int_1^x \frac{\ln(t)}{t}(1+t) dt \right]$ admet une limite finie quand x tend vers 0.
- Déterminer un équivalent simple de $f(x)$ au voisinage de 0.
- Justifier que, pour $x > 0$, $f(x) = \frac{\ln(x)}{x} e^x + \int_1^x \frac{\ln(t)-1}{t^2} e^t dt$.
- Montrer les deux inégalités suivantes, valables pour $x \geq 1$:
 - $\left| \int_1^{x^{2/3}} \frac{\ln(t)-1}{t^2} e^t dt \right| \leq \left(1 + \frac{2}{3} \ln(x) \right) e^{x^{2/3}}$
 - $\left| \int_{x^{2/3}}^x \frac{\ln(t)-1}{t^2} e^t dt \right| \leq \frac{1 + \ln(x)}{x^{4/3}} e^x$
- A l'aide des dernières questions, déterminer un équivalent de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

3. Une autre fonction

Dans cette question, on note ϕ la restriction de f à l'intervalle $[1, +\infty[$:

$$\forall x \geq 1, \phi(x) = \int_1^x g(t) dt = \int_1^x \frac{\ln(t)}{t} e^t dt.$$

- Justifier que ϕ réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur un intervalle à préciser.
- Justifier que ϕ^{-1} , la réciproque de ϕ , est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle à préciser.
- Montrer qu'il existe une fonction h , définie sur $]0, 1]$, à valeurs dans $[1, +\infty[$, et telle que

$$\forall x \in]0, 1], \int_1^x \frac{\ln(t)}{t} e^t dt = \int_1^{h(x)} \frac{\ln(t)}{t} e^t dt.$$

On donnera une expression de $h(x)$ en fonction de f et de ϕ^{-1} .

- Préciser les variations de h sur $]0, 1]$, $h(1)$ et $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$.