

TD6 : Intégration

Exercice 1

Calculer, pour $x > 0$, les intégrales suivantes en utilisant le changement de variable indiqué :

1. $I(x) = \int_0^x \sqrt{e^t - 1} \, dt$ en posant $u = \sqrt{e^t - 1}$
2. $J(x) = \int_x^{\frac{1}{x}} \frac{t \ln(t)}{(1+t^2)^2} \, dt$ en posant $t = \frac{1}{u}$.

Exercice 2 (CCINP PSI 2019)

1. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $\forall t \in [a, b], f(t) = f(a + b - t)$. Montrer que $\int_a^b t f(t) \, dt = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(t) \, dt$.
2. Calculer $\int_0^\pi \frac{x \sin(x)}{1 + \cos^2 x} \, dx$

Exercice 3

Soit $x \in \mathbb{R}, x \neq \pm 1$.

1. Justifier l'existence de $I(x) = \int_0^\pi \ln(x^2 - 2x \cos(t) + 1) \, dt$.
2. Donner la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ de $X^{2n} - 1$
3. Soit $S_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(x^2 - 2x \cos \frac{k\pi}{n} + 1\right)$; justifier que $I(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \pi S_n(x)$. (*)
4. En déduire la valeur de $I(x)$. (*)

Exercice 4

1. Montrer que $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$ est définie sur $]0, 1[$.
2. Montrer que f se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$. (*)
3. Calculer $\int_0^1 \frac{1-t}{\ln t} \, dt$.

Exercice 5

Pour $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$, on pose $\phi(f)(x) = \int_0^1 \inf(x, t) f(t) \, dt$.

1. En utilisant la relation de Chasles, trouver une autre forme de $\phi(f)(x)$. Prouver que ϕ est un endomorphisme de $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$.
2. Trouver $\ker \phi$
3. Prouver que $\phi(f)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ et calculer $(\phi(f))''$ en fonction de f .
4. En déduire $\text{Im}(\phi)$
5. Résoudre l'équation $\phi(f) = \lambda f$ où $\lambda \in \mathbb{R}$. (*)

Exercice 6 (ICNA PSI 2019)

1. Pour quelle(s) valeur(s) de a et b , $\int_0^{+\infty} (\sqrt{t} + a\sqrt{t+1} + b\sqrt{t+2}) \, dt$ converge-t-elle? (*)
2. Calculer cette intégrale quand elle converge.

Exercice 7

Justifier la convergence de $I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan t}{1+t^2} \, dt$, $I_2 = \int_0^{+\infty} \sin^2(t) e^{-t} \, dt$ et $I_3 = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} \, dt$.

Exercice 8

Soit $f(x) = \int_x^{+\infty} e^{-t^2} \, dt$

1. Montrer que f est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$; déterminer $f'(x)$.
 2. Montrer que $I = \int_0^{+\infty} f(x) \, dx$ est convergente.
 3. Calculer I . (*)
-

Indications

Exercice 3

3. *Somme de Riemann*

Exercice 4

2. *Pour la limite en 1, soit encadrer $f(x)$, soit introduire un équivalent de $\frac{1}{\ln t}$ en 1.*

Exercice 5

5. *si $\lambda \neq 0$ montrer qu'une solution f est nécessairement de classe $\mathcal{C}^2$*

Exercice 6

1. *On peut calculer une primitive puis DL avec la précision $o(1)$ et discuter sur la valeur des coefficients.*

Exercice 8

3. *IPP*