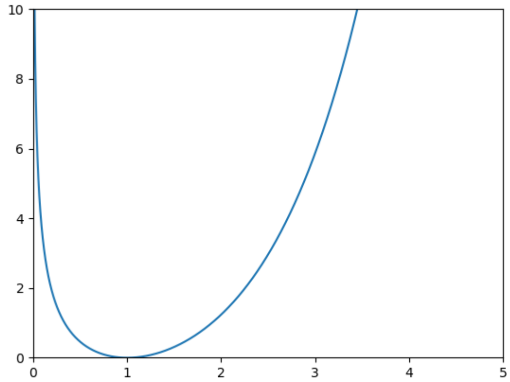
Correction du DM4

1. a) g est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ donc $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^{+*})$ et $\boxed{f'(x) = g(x) = \dfrac{\ln x}{x} e^x}$. On en déduit que f est décroissante sur $]0,1]$ et croissante sur $[1,+\infty[$.

b) Si $t > 0$, $e^t \geqslant 1$; de plus, avec $t \in]0,1]$, on a $\dfrac{\ln t}{t} \leqslant 0$ donc $g(t) \leqslant \dfrac{\ln t}{t}$. On calcule $\displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\ln t \,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}(\ln t)^2\right]_1^x = \frac{1}{2}(\ln x)^2$. Enfin, si $x \in]0,1]$ alors en intégrant l'inégalité initiale, on obtient $\displaystyle\int_x^1 g(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_x^1 \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t$ puis $f(x) \geqslant \dfrac{1}{2}(\ln x)^2$, ce qui donne $\boxed{\lim_0 f = +\infty}$

c) On vérifie que $e^t \geqslant t$ sur $\mathbb{R}^+$ en étudiant la fonction $t \mapsto e^t - t$ (croissante sur $\mathbb{R}^+$ et nulle en 0). On en déduit $\dfrac{e^t}{t} \geqslant 1$ et si $t \geqslant 1$, $\ln t \geqslant 0$ puis $g(t) \geqslant \ln(t)$. Si $x \geqslant 1$, en intégrant cette inégalité, on obtient $f(x) \geqslant \displaystyle\int_1^x \ln t\,\mathrm{d}t = \Big[t\ln t - t\Big]_1^x = x\ln x - x + 1 \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ donc $\boxed{\lim_{+\infty} f = +\infty}$

d)



2. a) On a $g(t) - \dfrac{\ln t}{t}(1+t) = \dfrac{\ln t}{t}(e^t - 1 - t) \underset{t\to0}{=} \dfrac{\ln t}{t}\left(1 + t + \dfrac{t^2}{2} + o(t^2) - 1 - t\right) \underset{t\to0}{\sim} \dfrac{t\ln t}{2} \xrightarrow[t\to0]{} 0$ donc on obtient $\boxed{\lim_{t\to0} g(t) - \dfrac{\ln t}{t}(1+t) = 0}$

La fonction $t \mapsto g(t) - \dfrac{\ln t}{t}(1+t)$ étant prolongeable par continuité au segment $[0,1]$, on en déduit la limite $f(x) - \displaystyle\int_1^x \frac{\ln t}{t}(1+t)\,\mathrm{d}t = \int_1^x \left[g(t) - \frac{\ln t}{t}(1+t)\right]\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to0]{} -\int_0^1 \left[g(t) - \frac{\ln t}{t}(1+t)\right]\,\mathrm{d}t = I.$

b) On a alors $f(x) \underset{x\to0}{=} \displaystyle\int_1^x \frac{\ln t}{t}(1+t)\,\mathrm{d}t + I + o(1) = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + x\ln(x) - x + 1 + I + o(1)$; comme $x\ln(x) \underset{x\to0}{=} o((\ln x)^2)$, on en déduit $\boxed{f(x) \underset{x\to0}{\sim} \dfrac{1}{2}(\ln x)^2}$

c) Il suffit de faire une IPP avec les deux fonctions u et v $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ données par $u(x) = u'(x) = e^x$ et $v(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ donc $v'(x) = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{\ln x}{x^2}$.

d) i. Si $x \geqslant 1$ alors $\left|\displaystyle\int_1^{x^{2/3}} \frac{\ln t - 1}{t^2} e^t\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_1^{x^{2/3}} \left|\frac{\ln t - 1}{t^2} e^t\right|\,\mathrm{d}t$ et si $t \in [1, x^{2/3}]$, on a $\left|\dfrac{\ln t - 1}{t^2} e^t\right| \leqslant \dfrac{\ln t + 1}{t^2} e^t$

$\dfrac{\ln t + 1}{t^2} e^t \leqslant \left(1 + \dfrac{2}{3}\ln x\right) e^t$ donc $\left|\displaystyle\int_1^{x^{2/3}} \frac{\ln t - 1}{t^2} e^t\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \left(1 + \frac{2}{3}\ln x\right) \int_1^{x^{2/3}} e^t\,\mathrm{d}t = \left(1 + \frac{2}{3}\ln x\right)\left(e^{x^{2/3}} - e\right)$

donc $\boxed{\left|\displaystyle\int_1^{x^{2/3}} \frac{\ln t - 1}{t^2} e^t\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \left(1 + \frac{2}{3}\ln x\right) e^{x^{2/3}}}$

ii. On procède de même : $\left|\displaystyle\int_{x^{2/3}}^x \frac{\ln t - 1}{t^2} e^t\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_{x^{2/3}}^x \left|\frac{\ln t - 1}{t^2} e^t\right|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{x^{2/3}}^x \frac{\ln t + 1}{t^2} e^t\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{x^{2/3}}^x \frac{\ln x + 1}{(x^{2/3})^2} e^t\,\mathrm{d}t$

et enfin $\boxed{\left|\displaystyle\int_{x^{2/3}}^x \frac{\ln t - 1}{t^2} e^t\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{\ln x + 1}{x^{4/3}} e^x}$

e) Comme $\left(1+\frac{2}{3}\ln x\right)e^{x^{2/3}} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{2}{3}\ln x e^{x^{2/3}} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{\ln x}{x}e^x\right)$ car $\frac{\ln x e^{x^{2/3}}}{\frac{\ln x}{x}e^x} = \frac{1}{x}e^{-x(1-x^{-1/3})} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ et $\frac{\ln x+1}{x^{4/3}}e^x \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\ln x}{x^{4/3}}e^x \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{\ln x}{x}e^x\right)$, on en déduit $\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\ln x}{x}e^x}$

3. a) ϕ est continue et strictement croissante sur $[1,+\infty[$ car $\phi'(x) = \frac{\ln x}{x}e^x > 0$ sur $]1,+\infty[$ donc ϕ réalise une bijection de $[1,+\infty[$ sur $\left[\phi(1), \lim\limits_{+\infty}\phi\right[= \mathbb{R}^+$.

b) Comme ϕ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[$ et ϕ' ne s'annule pas sur cet intervalle, $\boxed{\phi^{-1} \text{ est } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } \phi(]1,+\infty[) = \mathbb{R}^{+*}}$

c) On cherche h telle que $f(x) = \phi(h(x))$; il suffit donc de prendre $\boxed{h(x) = \phi^{-1}\circ f(x)}$ (et c'est d'ailleurs la seule possibilité).

d) f est décroissante sur $]0,1]$, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, ϕ croissante sur $[1,+\infty[$ donc ϕ^{-1} est croissante sur $\mathbb{R}^+$; par composition, $\boxed{h \text{ est décroissante sur }]0,1]}$

On a $h(1) = \phi^{-1}\circ f(1) = \phi^{-1}(0) = 1$ et comme $\lim\limits_{+\infty}\phi = +\infty$, on a aussi $\lim\limits_{+\infty}\phi^{-1} = +\infty$, donc, par composition des limites $\boxed{\lim\limits_{0} h = +\infty}$