

1. a) $\sin 3x = \operatorname{Im}[(\cos x + i \sin x)^3] = 3 \sin x \cos^2 x - \sin^3 x = \boxed{3 \sin x - 4 \sin^3 x}$
- b) $f(x) = \frac{\sin x - x}{x^2} \underset{0}{\sim} -\frac{x}{6}$ donc on prolonge f par continuité en posant $f(0) = 0$. $\frac{f(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\frac{1}{6}$ donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = -\frac{1}{6}$. Pour $x \neq 0$, $x^2 \neq 0$ donc, par quotient, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et $f'(x) = \frac{\cos x - 1}{x^2} - 2 \frac{\sin x - x}{x^3}$. On a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}$ et $\sin x - x \underset{0}{\sim} -\frac{x^3}{6}$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = -\frac{1}{6}$; on en déduit $\lim_0 f' = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = -\frac{1}{6} = f'(0)$ donc f' est continue en 0 et $\boxed{f \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}}$

2. a) $x \mapsto \frac{\sin^3 x}{x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 x}{x^2} = 0$ donc $x \mapsto \frac{\sin^3 x}{x^2}$ est intégrable sur $]0, 1]$.
 $\left| \frac{\sin^3 x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$ et $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ donc $x \mapsto \frac{\sin^3 x}{x^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ donc sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\boxed{I \text{ existe}}$
- b) $x \mapsto \frac{\sin 3x}{x^2}$ est continue sur $[a, +\infty[$ et $\left| \frac{\sin 3x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$; $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est intégrable sur $[a, +\infty[$ donc $x \mapsto \frac{\sin 3x}{x^2}$ est intégrable sur $[a, +\infty[$.
 On pose $u = 3x$: la fonction $u \mapsto \frac{u}{3}$ est une bijection $\mathcal{C}^1$ strictement croissante de $[3a, +\infty[$ sur $[a, +\infty[$ (ce

qui assure l'absolue convergence de la deuxième intégrale) : $\boxed{\int_a^{+\infty} \frac{\sin 3x}{x^2} dx = 3 \int_{3a}^{+\infty} \frac{\sin u}{u^2} du}$

c) On a :

$$\begin{aligned} I(a) &= \int_a^{+\infty} \frac{3 \sin x - \sin 3x}{4x^2} dx = \frac{3}{4} \left[\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx - \int_{3a}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx \right] = \frac{3}{4} \int_a^{3a} \frac{\sin x}{x^2} dx \\ &= \frac{3}{4} \int_a^{3a} f(x) dx + \frac{3}{4} \int_a^{3a} \frac{dx}{x} \end{aligned}$$

et comme $\int_a^{3a} \frac{dx}{x} = \ln 3$, on obtient $\boxed{I(a) = \frac{3}{4} \int_a^{3a} \varphi(x) dx + \frac{3}{4} \ln 3}$

- d) La fonction f étant continue sur $\mathbb{R}^+$, on a $\lim_{a \rightarrow 0} \int_a^{3a} \varphi(x) dx = 0$: en effet, f est intégrable sur $[0, 1]$ donc $\int_a^{3a} f(t) dt = \int_a^1 f(t) dt - \int_{3a}^1 f(t) dt \xrightarrow{a \rightarrow 0} \int_0^1 f(t) dt - \int_0^1 f(t) dt = 0$. On a donc $\boxed{I = \lim_{a \rightarrow 0} I(a) = \frac{3}{4} \ln 3}$

3. La fonction $g : x \mapsto \frac{\sin^5 x}{x^2}$ est continue sur $]0, +\infty[$, $g(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^3 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ donc g est intégrable sur $]0, 1]$ et $|g(x)| \leq \frac{1}{x^2}$ donc g est intégrable sur $[1, +\infty[$ donc sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Pour le calcul, on procède de même : $J = \lim_{a \rightarrow 0} \int_a^{+\infty} \frac{\sin^5 x}{x^2} dx$ et $\sin^5 x = \frac{1}{16}(\sin(5x) - 5 \sin(3x) + 10 \sin(x))$. Les fonctions $x \mapsto \frac{\sin(kx)}{x^2}$ sont intégrables sur $[a, +\infty[$ (avec $a > 0$) car continues sur $[a, +\infty[$ et $\left| \frac{\sin(kx)}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$; on a donc $J(a) = \int_a^{+\infty} \frac{\sin^5(x)}{x^2} dx = \frac{1}{16} \left[\int_a^{+\infty} \frac{\sin(5x)}{x^2} dx - 5 \int_a^{+\infty} \frac{\sin(3x)}{x^2} dx + 10 \int_a^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2} dx \right]$. On pose $u = 5x$ dans la première intégrale et $u = 3x$ dans la deuxième (les deux fonctions $u \mapsto \frac{u}{5}$ et $u \mapsto \frac{u}{3}$ sont $\mathcal{C}^1$, bijectives et strictement croissantes de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$) et on obtient

$$\begin{aligned} 16J(a) &= 5 \int_{5a}^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u^2} du - 15 \int_{3a}^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u^2} du + 10 \int_a^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2} dx = -5 \int_{3a}^{5a} \frac{\sin(u)}{u^2} du + 10 \int_a^{3a} \frac{\sin(u)}{u^2} du \\ &= -5 \left(\int_{3a}^{5a} f(u) du + \int_{3a}^{5a} \frac{du}{u} \right) + 10 \left(\int_a^{3a} f(u) du + \int_a^{3a} \frac{du}{u} \right) \\ &= -5 \int_{3a}^{5a} f(u) du + 10 \int_a^{3a} f(u) du - 5 \ln \left(\frac{5}{3} \right) + 10 \ln 3 \end{aligned}$$

Comme $\lim_{a \rightarrow 0} \int_{3a}^{5a} f(u) du = \lim_{a \rightarrow 0} \int_a^{3a} f(u) du = 0$, on obtient $\boxed{J = \frac{1}{16}(15 \ln 3 - 5 \ln 5)}$