

PSI2. Devoir en classe n°2. 4h . Samedi 4 octobre 2025.**Proposition de solution.****Problème φ1. Origine Mines Ponts psi 2025.**

20) a) Par AD, on peut proposer $\omega_o = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$.

b) Pour $|x| \ll \pi$, alors $\sin(x) \approx x$ et on obtient alors : $\ddot{x} + \omega_o^2 x = 0$. C'est un oscillateur harmonique dont la solution est une sinusoïde de pulsation ω_o .

c) Si $|x|$ n'est pas suffisamment petit, le DL à l'ordre 1 n'est pas suffisant et on passe à l'ordre 3 : $\sin(x) \approx x - \frac{x^3}{6}$ et on obtient la relation proposée avec : $\alpha = \omega_o^2$ et $\beta = -\frac{\omega_o^2}{6}$

d) On a rajouté des frottements fluides.

e) Pour les deux premiers cas, on a les solutions mathématiques complètes. Pour les deux derniers, on n'a pas de solutions. Il faut donc une simulation (ordinateur, approche actuelle) ou une maquette expérimentale (suite de l'énoncé, passé pas si ancien)

21) Introduisons quelques notations en reconnaissant les montages :

- Intégrateur 1 de constante de temps $R_1 C_1$: tension d'entrée $x(t)$, tension de sortie $s_1(t)$;
- Inverseur de gain -1 : tension d'entrée $s_1(t)$; tension de sortie $-s_1(t)$;
- Intégrateur 2 de constante de temps $R_2 C_2$: tension d'entrée $-s_1(t)$, tension de sortie $\underline{x}(t)$.

Faisons l'hypothèse du régime sinusoïdal forcé pour faciliter les calculs. On peut alors écrire :

$$\underline{x}(t) = -\frac{1}{jR_2 C_2 \omega} (-\underline{s}_1(t)) = \frac{s_1(t)}{jR_2 C_2 \omega} = \frac{1}{jR_2 C_2 \omega} \left(-\frac{\underline{x}(t)}{jR_1 C_1 \omega} \right) = -\frac{\underline{x}(t)}{R_1 C_1 R_2 C_2 (j\omega)^2}$$

Par conséquent :

$$(j\omega)^2 \underline{x}(t) + \frac{\underline{x}(t)}{R_1 C_1 R_2 C_2} = 0$$

L'équation différentielle demandée s'écrit donc :

$$\ddot{x}(t) + \frac{x(t)}{R_1 C_1 R_2 C_2} = 0$$

Il s'agit de l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation propre $\omega_o = 1/\sqrt{R_1 C_1 R_2 C_2}$.

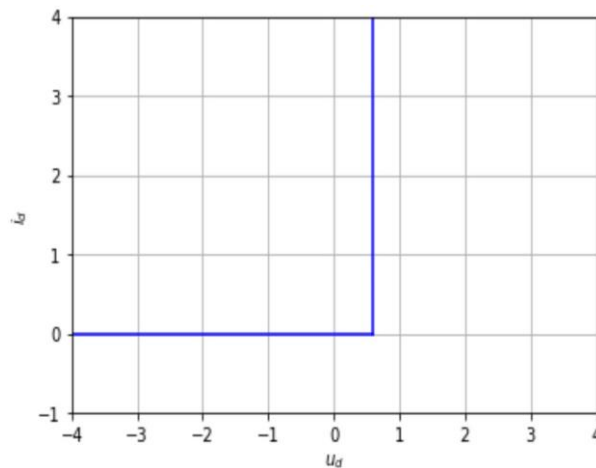
22) Seul le comportement de l'ALI 1 est changé. Les deux autres montages ont le même comportement. On applique la LDN à l'entrée - de l'ALI1. En RSP et en complexe, on obtient :

$$\frac{1}{R_1} (\underline{x}(t) - 0) + \frac{1}{R_o} (\underline{s}_1(t) - 0) + jC_1 \omega (\underline{s}_1(t) - 0) = 0$$

On tombe alors sur :

$$\ddot{x}(t) + \frac{\dot{x}(t)}{R_o C_1} + \frac{x(t)}{R_1 C_1 R_2 C_2} = 0$$

On obtient un oscillateur harmonique amorti.

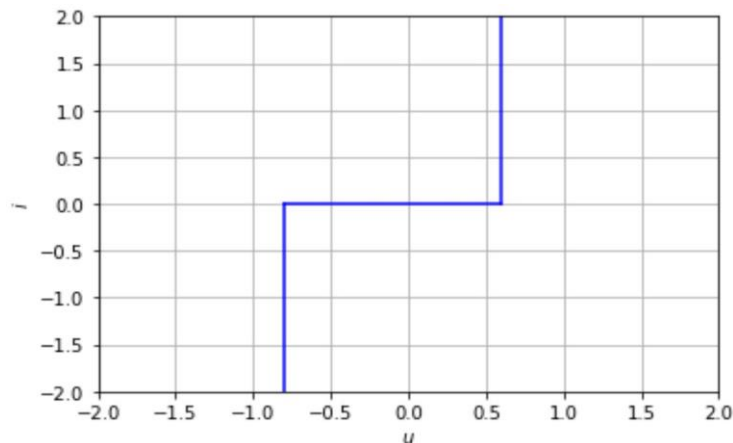
23) Caractéristique de la diode :

Examinons maintenant le dipôle tête-bêche. Pour les démos, prendre les mauvais choix et tomber sur une contradiction.

- Lorsque $i > 0$, la diode D_1 est passante tandis que la diode D_2 est bloquée. Pour la démo, supposer D_1 bloquée, donc $i_{D_2} = -i < 0$ donc impossible. Donc D_1 passante et donc $u = V_{D_1} > 0$ donc D_2 bloquée. Par conséquent, $u = V_{D_1} > 0$.
- Lorsque $i < 0$, reconstruire l'inverse la diode D_2 est passante tandis que la diode D_1 est bloquée. Par conséquent, $u = -V_{D_2} < 0$ (attention aux conventions d'orientation).
- Lorsque $i = 0$, les deux diodes sont bloquées et $-V_{D_2} < u < V_{D_1}$.

Il est évident qu'il est impossible que les deux diodes soient simultanément passantes.

On en déduit la caractéristique $i(u)$:

**24) Commençons par la relation liant v^+ et e , qui est toujours vraie :**

$$v^+ = v^- = \left(\frac{R_5}{R_4 + R_5} \right) e$$

En gardant les notations (u, i) précédentes, on a :

$$u = v^- - s = \left(\frac{R_5}{R_4 + R_5} \right) e - s \quad \text{donc} \quad s = \left(\frac{R_5}{R_4 + R_5} \right) e - u \quad eq(1)$$

Et la LDN donne alors :

$$\frac{1}{R_3}(e - v^-) + \frac{1}{R_6}(s - v^-) = i$$

Soit encore :

$$\frac{1}{R_3}\left(e - \left(\frac{R_5}{R_4 + R_5}\right)e\right) - \frac{u}{R_6} = i$$

Puis finalement :

$$\left(\frac{R_6 R_4}{R_3(R_4 + R_5)}\right)e - u = R_6 i \quad eq(2)$$

Ecrivons maintenant les trois fonctionnements

$$i > 0 \text{ et } u = V_D \quad eq(2) \text{ donne } e > \frac{R_3(R_4 + R_5)}{R_6 R_4} V_D = e_o \text{ et } eq(1) \text{ donne } s = \left(\frac{R_5}{R_4 + R_5}\right)e - V_D$$

$$i < 0 \text{ et } u = -V_D \quad eq(2) \text{ donne } e < -e_o \text{ et } eq(1) \text{ donne } s = \left(\frac{R_5}{R_4 + R_5}\right)e + V_D$$

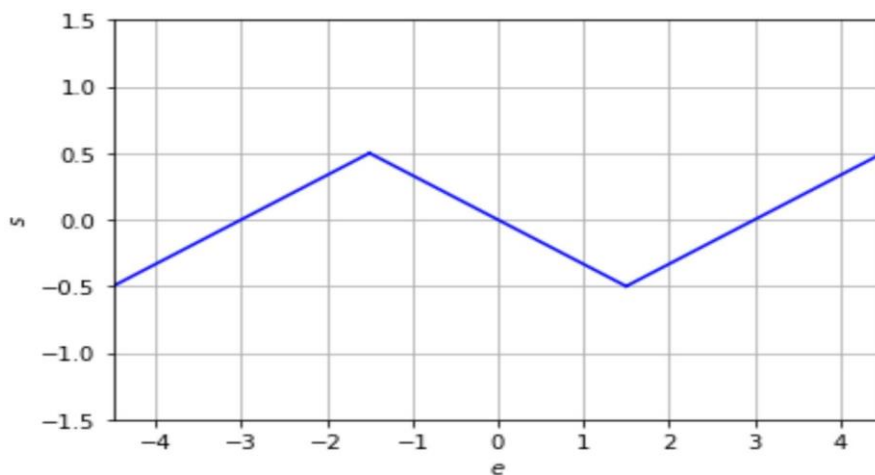
$$i = 0 \text{ et } -V_D < u < V_D \text{ donnent donc } -e_o < e < e_o \text{ et } eq(1 \text{ et } 2) \text{ donnent } s = \left[\frac{R_3 R_5 - R_4 R_6}{R_3(R_4 + R_5)}\right]e$$

25) Avec les valeurs données par l'énoncé, on obtient les équations suivantes :

$$s = \begin{cases} e/3 + V_D & \text{si } e \leq -3V_D/2 \\ -e/3 & \text{si } -3V_D/2 \leq e \leq 3V_D/2 \\ e/3 - V_D & \text{si } e \geq 3V_D/2 \end{cases}$$

On a deux points anguleux de coordonnées $(-3V_D/2, V_D/2)$ et $(3V_D/2, -V_D/2)$. La tension de sortie s'annule pour $e = -3V_D, 0$ et $3V_D$.

La caractéristique $s(e)$ est la suivante (pour $V_D = 1 \text{ V}$):



26) L'allure est globalement la même, sauf que les points anguleux sont arrondis. Cela est probablement dû à la commutation non instantanée des diodes et aussi au fait que les portions de caractéristiques des diodes ne sont pas verticales mais plutôt des exponentielles fortement croissantes.

La pente relevée sur la portion centrale est de l'ordre de $-400\text{mV}/1,2\text{ V} \approx -1/3$. La tension de sortie s'annule pour $e \approx \pm 1,8\text{ V}$. On en déduit $V_D \approx 600\text{mV}$. Les extrema culminent à un peu moins de $\pm 300\text{mV}$: cela est dû au caractère arrondi des points anguleux.

27) La pente en $e = 0$ s'identifie à α_e . Par conséquent, $\alpha_e \approx -1/3 \approx -0,3$.

D'autre part, $h_{\text{exp}}(1,8\text{ V}) = 0 = -1/3 \times 1,8 + \beta_e \times 1,8^3$. On en déduit: $\beta_e \approx 1/9,7 \approx 0,1\text{ V}^{-2}$. On a donc :

$$h_{\text{exp}}(e) \approx -0,3e + 0,1e^3$$

28) Comme à la question Q21, on peut écrire :

$$\ddot{x}(t) + \frac{s(t)}{R_1 C_1 R_2 C_2} = 0$$

Or, $s(t) = \alpha_e x(t) + \beta_e x^3(t)$. Par conséquent:

$$\ddot{x}(t) + \frac{\alpha_e x(t) + \beta_e x^3(t)}{R_1 C_1 R_2 C_2} = 0$$

On tombe sur l'équation mécanique du 20c. Ou presque...

29) Nommons $s_1(t)$ la tension de sortie du premier intégrateur. On a la relation :

$$s_1(t) = R_2 C_2 \dot{x}(t)$$

Il suffit donc de relever $s_1(t)$, tension de sortie du premier intégrateur.

Pour imposer les valeurs souhaitées à $x(0)$ et $\dot{x}(0)$, il suffit de charger les condensateurs C_2 et C_1 aux valeurs souhaitées (via une source de tension extérieure, en isolant les condensateurs du montage via des interrupteurs que l'on referme à $t = 0$). En effet, la tension aux bornes de C_2 n'est autre que $x(t)$ et la tension aux bornes de C_1 est $s_1(t) = R_2 C_2 \dot{x}(t)$.

30) La loi des nœuds donne facilement (étant donné que l'on a toujours $v^- = v^+ = 0$:

$$\frac{s(t)}{R_1} + I_p^- + C_1 \dot{z}(t) = 0$$

Par conséquent :

$$\dot{z}(t) = -\frac{s(t)}{R_1 C_1} - \frac{I_p^-}{C_1}$$

Avec $s(t) = S_0 \sin(\omega t)$, on obtient:

$$\dot{z}(t) = -\frac{S_0 \sin(\omega t)}{R_1 C_1} - \frac{I_p^-}{C_1}$$

On en déduit :

$$z(t) = \frac{S_0 \cos(\omega t)}{R_1 C_1 \omega} - \frac{I_p^- t}{C_1} + A$$

A $t = 0$, le condensateur est déchargé donc $z(0) = 0$. Par conséquent, $A = -S_0/R_1 C_1 \omega$.

On en déduit :

$$z(t) = \frac{S_0}{R_1 C_1 \omega} (\cos(\omega t) - 1) - \frac{I_p^- t}{C_1}$$

Le terme $-I_p^- t/C_1$ entraîne une dérive de la tension de sortie de l'intégrateur qui va rapidement saturer en tension.

31) En présence de la résistance R_7 placée en parallèle sur C_1 , la loi des nœuds s'écrit :

$$\frac{s(t)}{R_1} + I_p^- + C_1 \dot{z}(t) + \frac{z(t)}{R_7} = 0$$

On doit alors résoudre :

$$\dot{z}(t) + \frac{z(t)}{R_7 C_1} = -\frac{s(t)}{R_1 C_1} - \frac{I_p^-}{C_1}$$

La solution générale de l'équation homogène s'écrit $z_h(t) = A \exp(-t/R_7 C_1)$.

Pour déterminer la solution particulière, on utilise le théorème de superposition, l'équation étant linéaire. La solution particulière associée à $I_p^- s'$ écrit $z_{p,1}(t) = -R_7 I_p^- = \text{cste}$. C'est bien une solution de $\dot{z}(t) + z(t)/R_7 C_1 = -I_p^-/C_1$.

Pour déterminer la solution particulière associée à $S_0 \sin(\omega t)$, il s'agit de trouver la solution en RSF de l'équation

$$\dot{z}(t) + \frac{z(t)}{R_7 C_1} = -\frac{S_0 \sin(\omega t)}{R_1 C_1}$$

Le mieux est de passer en notation complexe :

$$(1 + j\omega R_7 C_1) \underline{z}_{p,2} = j \frac{R_7 S_0 \exp(j\omega t)}{R_1}$$

On en déduit :

$$\underline{z}_{p,2} = \frac{R_7 S_0}{R_1} \left(\frac{j \exp(j\omega t)}{1 + j\omega R_7 C_1} \right) = \frac{R_7 S_0}{R_1} \frac{(j \cos(\omega t) - \sin(\omega t))(1 - j\omega R_7 C_1)}{1 + \omega^2 R_7^2 C_1^2}$$

Il reste à prendre la partie réelle :

$$z_{p,2}(t) = \frac{R_7 S_0}{R_1} \left(\frac{\omega R_7 C_1 \cos(\omega t) - \sin(\omega t)}{1 + \omega^2 R_7^2 C_1^2} \right)$$

Conclusion : la solution complète s'écrit :

$$z(t) = A \exp(-t/R_7 C_1) - R_7 I_p^- + \frac{R_7 S_0}{R_1} \left(\frac{\omega R_7 C_1 \cos(\omega t) - \sin(\omega t)}{1 + \omega^2 R_7^2 C_1^2} \right)$$

La dérive que l'on avait précédemment n'est plus qu'un simple décalage (très faible compte tenu de la très faible valeur de I_p^-).

Une fois le régime transitoire éteint, on n'a plus que :

$$z(t) = -R_7 I_p^- + Z_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

On n'a plus la dérive du montage intégrateur, dérive qui entraînait la saturation de l'ALI.

32) Les équations régissant les deux intégrateurs s'écrivent :

$$\begin{cases} \dot{s}_1(t) + \frac{s_1(t)}{R_7 C_1} = -\frac{s(t)}{R_1 C_1} - \frac{I_p^-}{C_1} \\ \dot{x}(t) + \frac{x(t)}{R_8 C_2} = \frac{s_1(t)}{R_2 C_2} - \frac{I_p^-}{C_2} \end{cases}$$

En dérivant la seconde équation et en y injectant la première, on obtient:

$$\ddot{x}(t) + \frac{\dot{x}(t)}{R_8 C_2} = \frac{\dot{s}_1(t)}{R_2 C_2} = -\frac{s(t)}{R_1 C_1 R_2 C_2} - \frac{s_1(t)}{R_7 C_1 R_2 C_2} - \frac{I_p^-}{C_1 R_2 C_2}$$

Or,

$$\frac{s_1(t)}{R_7 C_1 R_2 C_2} = \frac{\dot{x}(t)}{R_7 C_1} + \frac{x(t)}{R_7 C_1 R_8 C_2} + \frac{I_p^-}{C_2 R_7 C_1}$$

Par conséquent :

$$\ddot{x}(t) + \left(\frac{1}{R_8 C_2} + \frac{1}{R_7 C_1} \right) \dot{x}(t) + \frac{x(t)}{R_7 C_1 R_8 C_2} = -\frac{s(t)}{R_1 C_1 R_2 C_2} - \frac{I_p^-}{C_1 C_2} \left(\frac{1}{R_7} + \frac{1}{R_8} \right)$$

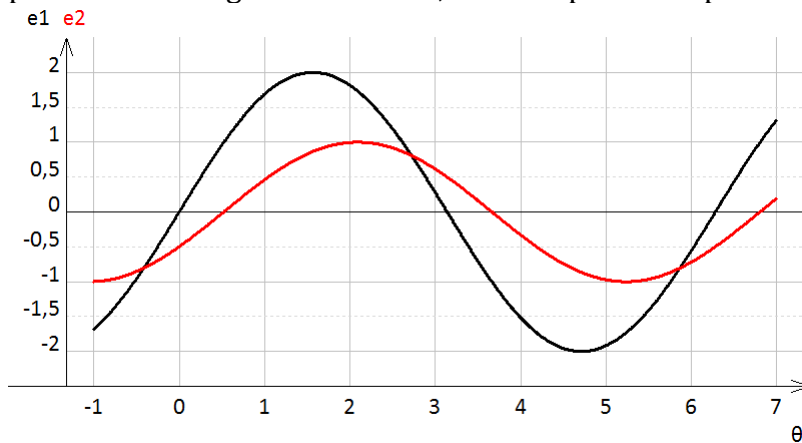
D'autre part, $s(t) = \alpha_e x(t) + \beta_e x^3(t)$. On en déduit:

$$\ddot{x}(t) + \left(\frac{1}{R_8 C_2} + \frac{1}{R_7 C_1} \right) \dot{x}(t) + \left(\frac{\alpha_e}{R_1 R_2} + \frac{1}{R_7 R_8} \right) \frac{x(t)}{C_1 C_2} + \frac{\beta_e x^3(t)}{R_1 C_1 R_2 C_2} = -\frac{I_p^-}{C_1 C_2} \left(\frac{1}{R_7} + \frac{1}{R_8} \right)$$

A un détail près, il s'agit de l'équation de la question 20d. Ou presque... On pourra donc obtenir les solutions de cette équation.

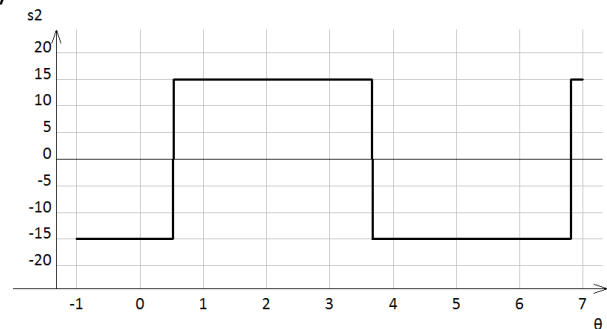
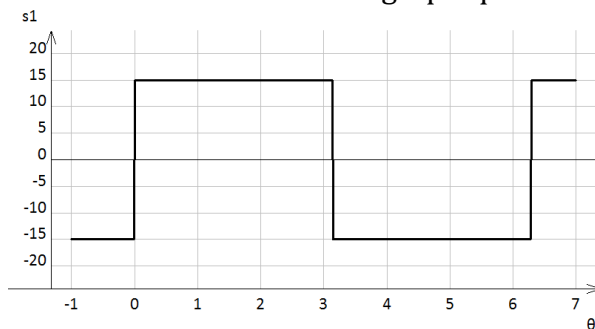
Problème $\varphi 2$. Fabrication d'un instrument de mesure. De quoi ?

1) Dans l'intervalle demandé, les passages à 0 se font à $\theta=0$, π et 2π pour e_1 et à $\theta=\varphi$ et $\pi+\varphi$ pour e_2 . Sur la figure ci-dessous, e_1 a l'amplitude la plus élevée et $\varphi=\pi/6$:



2) Il n'y a aucune rétroaction de la sortie sur les entrées, donc les deux ALI fonctionnent en saturation. Ce sont en fait de simples comparateurs : si l'entrée est positive (resp négative), la sortie est à V_{sat} (resp $-V_{sat}$).

On obtient donc les formes graphiques avec $\varphi=\pi/6$:



3) k est en V^{-1} .

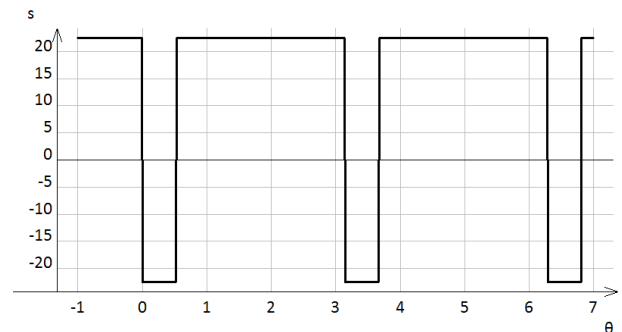
Pour θ dans $]0 \varphi[$ et $]\pi \pi+\varphi[$,

on a $a = -kV_{sat}^2$.

Pour θ dans $]\varphi \pi[$ et $]\pi+\varphi 2\pi[$,

on a $a = +kV_{sat}^2$.

Graphiquement pour $\varphi=\pi/6$:



4) On calcule alors la valeur moyenne ou composante continue par :

$$\langle s \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} s(\theta) d\theta = kV_{sat}^2 \cdot \left(1 - 2\frac{\varphi}{\pi}\right)$$

5) Pour récupérer la composante continue, il faut mettre derrière le montage un filtre passe-bas (ex filtre RC) dont la pulsation de coupure (ici $\omega_c = \frac{1}{RC}$) est très faible devant ω .

6) On vient de fabriquer un phasemètre.

7) On remarque que la tension de sortie dépasse V_{sat} en norme, donc le multiplieur va saturer. Si on veut éviter ce problème, on peut mettre deux PDT (par exemple facteur 1/2), entre les sorties s_1 et s_2 et les entrées du multiplieur (qui ici diviserait par 4 la tension de sortie et éviterait la saturation).

Mais en fait, la saturation ne pose pas de pb. Il suffit de remplacer kV_{sat}^2 par V_{sat} . Et le montage fonctionne encore.

Problème x1. L'oxygène : ressources, production. Extrait centrale 2018 psi.

Q 1. pourcentage massique : $16/18 = 88,8\%$

Q 2. les rapports massique de l'oxydène dans l'eau pure et dans l'eau de mer valent $m_O/m_{H_2O} = 0,888$ et $m_O/m_{mer} = 0,86$, soit le pourcentage massique d'eau dans la mer :

$$\frac{m_{H_2O}}{m_{mer}} = \frac{m_{H_2O}}{m_O} \times \frac{m_O}{m_{mer}} = \frac{0,86}{0,888} = 0,969$$

On en déduit par différence la fraction massique des composants autres que l'eau dans la mer :

$$\frac{m_{autre}}{m_{mer}} = 1 - 0,969 = 0,031$$

Puis leur concentration volumique, en utilisant les données (densité de l'eau de mer $d = 1,03$) :

$$c = \frac{m_{autre}}{V_{mer}} = \frac{m_{autre} \rho_{mer}}{m_{mer}} = \frac{m_{autre}}{m_{mer}} \times (d \times \rho_{H_2O}) = 0,031 \times 1,03 \times 1000 = 32,4 \text{ g L}^{-1}$$

Q 3. D'après les données on peut citer SiO_2 et Al_2O_3 comme oxydes présents dans la croûte terrestre.

Q6)

pour un même volume, en utilisant la loi du gaz parfait (qui donne une estimation car elle n'est certainement pas vérifiée à 200 bar) et les données

$$\frac{m_{O_{2gazeux}}}{m_{O_{2liquide}}} = \frac{\rho_{O_{2gazeux}}}{\rho_{O_{2liquide}}} = \frac{PM_a}{RT} \times \frac{1}{\rho_{O_{2liquide}}} = 0,231$$

Le choix entre les deux formes de stockage résulte d'un compromis : le stockage sous forme de gaz comprimé est plus simple à mettre en œuvre (pas de système de refroidissement ni de sécurité en cas de panne du refroidissement à prévoir) mais le stockage sous forme de liquide permet un gain de volume d'un facteur 5.

Q7) De la relation $\Delta_r G^\circ(T) = \Delta_r H^\circ - T \Delta_r S^\circ$ dans l'hypothèse d'Ellingham, on sort :

$$\Delta_r H_1^\circ = -46,6 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1} \quad \text{et} \quad \Delta_r H_2^\circ = -824 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

Ces valeurs sont négatives et correspondent à des réactions exothermiques.

Q8) $\Delta H = Q_p = (\Delta_r H^\circ) \xi$ car la transformation est monobare.

Q9) Cours : $\Delta_r G^\circ(T) + RT \ln(K(T))$.

Q10) A 300°C , on calcule $K_1 = 3,4 \cdot 10^{18}$ et $K_2 = 4,5 \cdot 10^{63}$.

L'information fournie permet de calculer les deux quotients de réactions :

$$Q_1 = \left(\frac{P(O_2)}{P^\circ} \right)^{3/2} \approx 0,6 < K_1 \quad \text{et} \quad Q_2 = \left(\frac{P(O_2)}{P^\circ} \right)^{-3/2} \approx 1,7 < K_2$$

Evolution ultérieure vers la droite sans pouvoir atteindre K_1 ou K_2 , car les quotients de réaction n'évoluent pas d'après l'énoncé. Les deux réactions sont totales.

Q11) La dissociation de n mol de chlorate fournissent à l'extérieur $Q = -\Delta H = -(\Delta_r H^\circ)n > 0$

Si n autres mol de chlorates reçoivent TOUTE cette énergie thermique à pression constante, leur variation d'enthalpie $\Delta H'$ vaut Q

La capacité calorifique massique du chlorate vaut 983 SI . Pour avoir la capacité molaire, il faut multiplier par la masse molaire $M = 0,1064 \text{ SI}$ et on obtient : $C_{Pmol} = 104,6 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

On a donc :

$$\Delta H' = n C_{Pmol} (T_f - T_o) = Q = -(\Delta_r H^\circ)n$$

On sort donc :

$$T_f = T_o - \frac{-(\Delta_r H^\circ)}{C_{Pmol}} \approx 460^\circ\text{C} > 300^\circ\text{C}$$

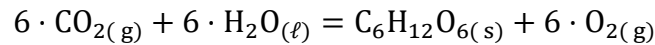
La réaction peut être auto-entretenu.

La consommation initiale du fer est nécessaire pour faire le premier chauffage et démarrer la réaction 1 d'un point de vue cinétique.

Q12) Dans les conditions fournies, la loi des gaz parfaits permet d'affirmer qu'on produit $2,42 \text{ mol}$ de O_2 . Compte-tenu de la stoechiométrie, il faut donc consommer $\frac{2}{3} \times 2,42 = 1,61 \text{ mol}$ de chlorate soit une masse de 171 g .

Problème γ2. ccp 2021 psi.

28 L'équilibre de synthèse du glucose s'écrit:



29 Soit $n = m/M_g$ la quantité de glucose formée. Alors on forme $6 \cdot n$ moles de dioxygène, soit pour un gaz parfait:

$$V(\text{O}_2) = \frac{6 \cdot n \cdot R \cdot T}{p} = \frac{6 \cdot m \cdot R \cdot T}{M_g \cdot p}$$

30 Avec les données fournies, on peut calculer la constante de réaction :

$$K(T = 298K) = \exp\left(-\frac{\Delta_r G^\circ(T=298K)}{RT}\right) \approx e^{-1000} \ll 1 \text{ difficilement calculable}$$

Par contre, on peut évaluer le quotient de réaction initial :

$$Q = \frac{a^6(\text{O}_{2(g)}) \cdot a(\text{C}_6\text{H}_{12}\text{O}_{6(s)})}{a^6(\text{CO}_{2(g)}) \cdot a^6(\text{H}_2\text{O}_{(\ell)})} = \left(\frac{20}{0,03}\right)^6 \gg 1$$

Donc, on a $Q > K$ évolution dans le sens indirect. Donc, dans les conditions ordinaires, la synthèse directe du glucose ne peut être spontanée et elle est donc provoquée.