TD7 : Intégration

Exercice 1

1. Montrer la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$

2. La fonction $t \mapsto \dfrac{\mathrm{ch}\left(\sqrt{t}\right)\ln t}{\sqrt{t}+\cos t}$ est-elle intégrable sur $]0,1]$?

3. L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t^2-1)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$ est-elle convergente ?

4. Soit $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$. Étudier la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t^\beta}\,\mathrm{d}t$. *(*)()*

Exercice 2 (CCINP PSI 2024)

On pose $I_{n,p} = \displaystyle\int_0^1 x^p(\ln x)^n\,\mathrm{d}x$ avec $n,p\in\mathbb{N}$.

1. Étudier l'existence de cette intégrale.

2. Déterminer une relation de récurrence sur n (par intégration par parties) et en déduire la valeur de $I_{n,p}$.

Exercice 3 (CCP PSI 2018)

Déterminer la nature des deux intégrales suivantes : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{\sin t}}{t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t)\sin\left(\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$. *(*)*

Exercice 4 (CCINP PSI 2023)

1. Soient $a,b\in\mathbb{R}$ tels que $a<b$ et $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On pose : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ I_n = \displaystyle\int_a^b f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$. *(*)*

2. Soit $I = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$.

a) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge et en déduire que I converge. *(*)*

b) Soit, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $K_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin nx}{x}\,\mathrm{d}x$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} K_n = I$.

c) On introduit $J_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin nx}{\sin x}\,\mathrm{d}x$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}(J_n - K_n) = 0$.

d) Montrer que, pour tout $p\in\mathbb{N}^*$, $J_{2p+1} = J_{2p-1}$. *(*)*

e) En déduire la valeur de I.

Exercice 5

Soit f continue par morceaux sur $\mathbb{R}^+$ telle que $t\mapsto f(t)e^{-\alpha t}$ soit intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$ et $x>\alpha$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n f(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t$ est convergente. *(*)*

Exercice 6 (CCP PSI 2013)

Pour $t>0$, on pose $f(t) = \dfrac{1}{t+\cos(t)}$ et, pour $x>0$, $g(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que g est prolongeable par continuité en 0. *(*)*

2. Montrer que, pour $x>0$, $\displaystyle\int_0^x g(t)^2\,\mathrm{d}t = 2\int_0^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t - xg(x)^2$.

3. Montrer que f^2 est intégrable sur $\mathbb{R}^+$; en déduire que g^2 est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ puis $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)^2\,\mathrm{d}t \leqslant 4\int_0^{+\infty} f(t)^2\,\mathrm{d}t$.

Indications

Exercice 1

4. *Distinguer selon le signe de β.*

Exercice 3

Vous devez savoir que $t\mapsto\sin(t)\sin\left(\frac{1}{t}\right)$ n'est pas intégrable en $+\infty$.

Exercice 4

1. *IPP puis majorer* $|I_n|$.
2. *a) IPP*
   d) $\sin(p) - \sin(q) = ?$

Exercice 5

1. *Pour appliquer le théorème de comparaison, on dispose, dans cet exercice, d'une fonction supplémentaire par rapport à celles vues en cours.*

Exercice 6

1. *Introduire* $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ *et reconnaître un taux d'accroissement.*
3. *Pour l'intégrabilité de* g^2, *vérifier* $2|fg| \leqslant f^2 + g^2$ *et utiliser* **2**. *Prouver ensuite que* $xg(x)^2$ *admet une limite finie* ℓ *en* $+\infty$ *avec* **2** *avant de montrer que* $\ell = 0$ *par l'absurde. Conclure en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.*