TD8 : Espaces probabilisés

Exercice 1 **(Mines-Télécom PSI 2018)**
Madame M prend tous les jours un bus A ou B. Lorsqu'elle prend le bus A (resp. B) il l'amène à l'heure avec la probabilité a (resp. b). Le premier jour, elle prend le bus A. On note A_k l'événement « Madame M prend le bus A le jour k ». Si un bus ne l'amène pas à l'heure un jour, elle prend l'autre le jour suivant, sinon elle reprend le même bus.

1. Montrer que $P(A_{k+1}) = (a+b-1)P(A_k) - b + 1$ pour $k \geqslant 1$ et en déduire $P(A_k)$. *(*)*
2. On note H_n : « Madame M arrive à l'heure le jour n ». Déterminer $P(H_n)$.
3. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} P(H_n)$.

Exercice 2 **(Centrale PSI 2024)**
Un automate allume, à la date n, une diode rouge ou une diode verte. Si à la date n il allume une diode rouge, il allume une diode verte à la date $n+1$ avec une probabilité $p \in]0,1[$; si à la date n il allume une diode verte, il allume une diode rouge à la date $n+1$ avec une probabilité $q \in]0,1[$. On note r_n (resp. v_n) la probabilité que la diode allumée soit rouge (resp. verte) à l'instant n

1. Trouver $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $\begin{pmatrix} v_{n+1} \\ r_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} v_n \\ r_n \end{pmatrix}$, à l'aide de la formule des probabilités totales.
2. Déterminer $B, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $\left\{ \begin{array}{c} B + C = I_2 \\ B + (1-p-q)C = A \end{array} \right.$ puis en déduire A^n pour $n \geqslant 1$
3. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$

Exercice 3 **(Mines-Télécom PSI 2022)**
On lance une pièce qui donne pile avec la probabilité $p \in]0,1[$. On fait deux lancers : si on fait PP, on a gagné ; si on fait FF, on a perdu ; sinon on recommence.

1. Quelle est la probabilité de gagner ? *(*)*
2. Est-on presque sûr que le jeu se termine ?

Exercice 4 **(Mines-Télécom PSI 2024)**
Deux joueurs font une séance de tirs aux buts. Le joueur 1 marque, à chacun de ses essais, avec une probabilité p_1 ; le joueur 2 avec une probabilité p_2. Le joueur 1 tire en premier, puis ils tirent chacun à leur tour jusqu'à ce que l'un d'entre eux marque.

1. Quelle est la probabilité que le joueur 1 gagne ?
2. Justifier que le jeu se termine presque sûrement.
3. Déterminer une relation entre p_1 et p_2 de sorte que le jeu soit équitable

Exercice 5
Une personne lance une pièce qui donne pile avec la probabilité p (où $p \in]0,1[$). Elle gagne dès qu'elle a obtenu 2 piles de plus que de faces, et elle perd dès qu'elle a obtenu 2 faces de plus que de piles.

1. Soit E_{2n}= « Obtenir autant de piles que de faces lors des $2n$ premiers lancers sans que la partie ne s'arrête ». Calculer $P(E_{2n})$. *(*)*
2. Soit G_{2n}= « Elle gagne la partie à l'issu du $2n^{\text{ème}}$ lancer ». Calculer $P(G_{2n})$
3. Quelle est la probabilité que la personne gagne la partie ? Probabilité qu'elle perde la partie ?

Exercice 6 **(EIVP PSI 2017)**
On lance une infinité de fois une pièce qui fait pile avec une probabilité $p \in]0,1[$. On définit A : « on obtient pile pour la première fois au bout d'un nombre pair de lancers » et B : « au bout d'un nombre de lancers multiple de 3 ». Calculer $P(A)$ et $P(B)$. Sont-ils indépendants ?

Indications

Exercice 1

1. $(A_k, \overline{A_k})$ *est un SCE.*

Exercice 3

1. *Introduire 3 événements A_k, B_k, C_k selon que l'on fait PP, FF ou autre chose au $k^{\text{ème}}$ lancer.*

Exercice 5

1. *Introduire un SCE pour décrire les résultats possibles des 2 premiers lancers et trouver une relation entre $P(E_{2n})$ et $P(E_{2n-2})$.*