

Problème : Partie I

1. $\arctan$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et $\arctan(0) = 0$ donc $\arctan \in E_0$ puis $\arctan'(t) = \frac{1}{1+t^2}$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{(1+t^2)^2}$ est $\mathcal{CM}^0$ sur $[0, +\infty[$ et $\frac{1}{(1+t^2)^2} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^4}$ donc $t \mapsto \frac{1}{(1+t^2)^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et $\boxed{\arctan \in E_2}$

On pose $t = \tan \theta$: $\tan$ est $\mathcal{C}^1$ bijective strictement croissante de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}^+$, $dt = (1 + \tan^2 \theta) d\theta$, donc

$$N_2(f)^2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(1 + \tan^2 \theta)^2} \times (1 + \tan^2 \theta) d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2\theta) d\theta \text{ donc } \boxed{N_2(f) = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}}$$

2. On a déjà vu que $\arctan \in E_0$; $t \mapsto \left(\frac{\arctan t}{t}\right)^2$ est $\mathcal{CM}^0$ sur $]0, +\infty[$, puis $\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\arctan t}{t}\right)^2 = 1$ donc la fonction $t \mapsto \left(\frac{\arctan t}{t}\right)^2$ est intégrable sur $]0, 1]$ et $\left(\frac{\arctan t}{t}\right)^2 \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ car $\arctan$ est bornée donc $t \mapsto \left(\frac{\arctan t}{t}\right)^2$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ et $\boxed{\arctan \in E_1}$

3. a) Si $x \in \mathbb{R}^+$, la fonction $t \mapsto \frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)}$ est $\mathcal{CM}^0$ sur $]0, +\infty[$ puis $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)} = x$ car $\arctan u \underset{0}{\sim} u$ et $t \mapsto \frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)}$ est intégrable sur $]0, 1]$; enfin, $\frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc $t \mapsto \frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ et $\boxed{\theta \text{ est définie sur } \mathbb{R}^+}$

- b) Pour $x \neq 1$, $\frac{1}{(1+t^2)(1+(xt)^2)} = \frac{1}{1-x^2} \left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{x^2}{1+(xt)^2} \right)$ donc $\theta'(x) = \left[\frac{\arctan t - x \arctan(xt)}{1-x^2} \right]_{t=0}^{t=+\infty}$.
Pour $x > 0$, on a $\lim_{t \rightarrow +\infty} \arctan(xt) = \frac{\pi}{2}$, donc $\theta'(x) = \frac{\pi}{2(1-x^2)}(1-x)$. Comme θ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$, θ' est continue en 1 et $\theta'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \theta'(x) = \frac{\pi}{4}$. On en déduit que $\boxed{\forall x \geq 0, \theta'(x) = \frac{\pi}{2(1+x)}}$ car $\theta'(0) = \left[\arctan t \right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$.

- c) On en déduit, pour $x \geq 0$, $\theta(x) = \frac{\pi}{2} \ln(1+x) + C$, car $\mathbb{R}^+$ est un intervalle, puis, comme $\theta(0) = 0$,
 $\boxed{\theta(x) = \frac{\pi}{2} \ln(1+x)}$

4. $N_1(f)^2 = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\arctan t}{t}\right)^2 dt$; les fonctions $t \mapsto (\arctan t)^2$ et $t \mapsto -\frac{1}{t}$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\arctan t)^2}{t} = 0$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{(\arctan t)^2}{t} = 0$ donc $N_1(f)^2 = \left[-\frac{(\arctan t)^2}{t} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{2 \arctan t}{t(1+t^2)} dt$ donc $N_1(f)^2 = 2\theta(1)$. Comme $N_1(f) \geq 0$, on en déduit $\boxed{N_1(f) = \sqrt{\pi \ln(2)}}$

Partie II

1. Comme $t + \sqrt{t^2 + 1} \geq 1$, f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et $f'(t) = \frac{1 + \frac{2t}{2\sqrt{t^2+1}}}{t + \sqrt{t^2+1}}$ donc $\boxed{f'(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}}$ Comme $f(0) = 0$, $f \in E_0$; de plus $t \mapsto f'(t)^2 = \frac{1}{1+t^2}$ est bien intégrable sur $\mathbb{R}^+$ donc $f \in E_2$ et $N_2(f)^2 = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$ donc $\boxed{N_2(f) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}}$

2. $f(t) = \ln \left[t \left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{t^2}} \right) \right] \underset{t \rightarrow +\infty}{=} \ln(t) + \ln(2) + o(1)$ donc $\boxed{f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(t)}$ et $f(t) \underset{0}{=} \ln(t+1+o(t)) \underset{0}{=} t + o(t)$ donc $\boxed{f(t) \underset{0}{\sim} t}$

3. On a déjà vu que $f \in E_0$, $t \mapsto \left(\frac{f(t)}{t}\right)^2$ est bien $\mathcal{CM}^0$ sur $]0, +\infty[$, $\left(\frac{f(t)}{t}\right)^2 \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(\ln t)^2}{t^2} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)$ et $\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{f(t)}{t}\right)^2 = 1$ donc $t \mapsto \left(\frac{f(t)}{t}\right)^2$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\boxed{f \in E_1}$

4. a) $t \mapsto \frac{t}{\text{sh}(t)}$ est $\mathcal{CM}^0$ sur $]0, +\infty[$, $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\text{sh}(t)} = 1$ et $\frac{t}{\text{sh}(t)} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} 2te^{-t} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc $\boxed{t \mapsto \frac{t}{\text{sh}(t)} \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}^{+*}}$

- b) Pour $k \geq 0$, on a $2k+1 > 0$ donc $t \mapsto te^{-(2k+1)t}$ est $\mathcal{CM}^0$ sur $[0, +\infty[$ et $te^{-(2k+1)t} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc $\boxed{t \mapsto te^{-(2k+1)t} \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}^+}$ On effectue une IPP : les fonctions $t \mapsto t$ et $t \mapsto \frac{e^{-(2k+1)t}}{2k+1}$ sont $\mathcal{C}^1$ sur

$$\mathbb{R}^+ \text{ et } \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{te^{-(2k+1)t}}{2k+1} = 0 \text{ donc } J_k = \left[\frac{-te^{-(2k+1)t}}{2k+1} \right]_0^{+\infty} + \frac{1}{2k+1} \int_0^{+\infty} e^{-(2k+1)t} dt \text{ donc } \boxed{J_k = \frac{1}{(2k+1)^2}}$$

- c) Pour $t > 0$, on a $e^t \neq 1$ donc $\sum_{k=0}^n te^{-(2k+1)t} = te^{-t} \frac{1 - e^{-(2n+2)t}}{1 - e^{-2t}} = \frac{t}{2 \operatorname{sh}(t)} (1 - e^{-(2n+2)t})$. Les fonctions $t \mapsto te^{-(2k+1)t}$ et $t \mapsto \frac{t}{\operatorname{sh}(t)}$ étant intégrables sur $\mathbb{R}^{+*}$, il en est de même, par linéarité, de $t \mapsto \frac{te^{-(2n+2)t}}{\operatorname{sh}(t)}$ et en

$$\text{intégrant cette égalité, on obtient } \boxed{\sum_{k=0}^n J_k = \int_0^{+\infty} \frac{t}{\operatorname{sh}(t)} (1 - e^{-(2n+2)t}) dt}$$

- d) $t \mapsto \operatorname{sh}(t) - t$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et nulle en 0 donc, pour $t > 0$, on a $0 < t \leq \operatorname{sh}(t)$ ce qui donne $\boxed{0 \leq \frac{t}{\operatorname{sh}(t)} \leq 1}$

- e) On en déduit $\left| \int_0^{+\infty} \frac{t}{\operatorname{sh}(t)} e^{-(2n+2)t} dt \right| \leq \int_0^{+\infty} e^{-(2n+2)t} dt$ (qui existe car $2n+2 > 0$) donc, en calculant l'intégrale de droite,

$$\left| \int_0^{+\infty} \frac{t}{\operatorname{sh}(t)} e^{-(2n+2)t} dt \right| \leq \frac{1}{2n+2} \text{ et, par encadrement } \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{t}{\operatorname{sh}(t)} e^{-(2n+2)t} dt = 0}$$

On en déduit $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n J_k = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{t}{\operatorname{sh}(t)} dt$ ce qui signifie bien que $J = 2 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$ par définition de la somme d'une série.

- f) On passe par les sommes partielles : en séparant les termes pairs et impairs $\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k^2} = \sum_{p=1}^n \frac{1}{(2p)^2} + \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{(2p+1)^2}$

$$\text{et en faisant tendre } n \text{ vers } +\infty, \text{ on en déduit } \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} - \frac{1}{4} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} \text{ donc } \boxed{J = \frac{\pi^2}{4}}$$

5. a) On effectue une IPP : les fonctions $t \mapsto f(t)^2$ et $t \mapsto \frac{-1}{t}$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$; $\frac{f(t)^2}{t} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(\ln t)^2}{t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ et

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)^2}{t} = 0 \text{ donc } I = \left[\frac{-f(t)^2}{t} \right]_0^{+\infty} + 2 \int_0^{+\infty} \frac{f(t)f'(t)}{t} dt \text{ puis } \boxed{I = 2 \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t\sqrt{1+t^2}} dt}$$

- b) La fonction sh est $\mathcal{C}^1$ bijective strictement croissante de $\mathbb{R}^{+*}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ donc $I = 2 \int_0^{+\infty} \frac{f(\operatorname{sh} u)}{\operatorname{sh}(u) \operatorname{ch}(u)} \operatorname{ch}(u) du$ et

$$\text{on vérifie que } f(\operatorname{sh} u) = u \text{ donc } \boxed{I = 2 \int_0^{+\infty} \frac{u}{\operatorname{sh}(u)} du}$$

- c) Avec la valeur de J trouvée précédemment, on a $\boxed{N_1(f) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}}$

Partie III

1. a) f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ donc admet un $\operatorname{DL}_1(0)$ (d'après la formule de Taylor-Young) : $f(x) = f(0) + \alpha x + o(x)$.

$$\text{On en déduit } \boxed{\lim_0 g = 0 \text{ et } \lim_0 h = \alpha}$$

- b) Par quotient, g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$; pour $t > 0$, $f(t) = \sqrt{t}g(t)$ donc $f'(t) = \sqrt{t}g'(t) + \frac{g(t)}{2\sqrt{t}}$ donc

$$\boxed{f'(t) - \sqrt{t}g'(t) = \frac{1}{2}h(t) \text{ pour } t > 0}$$

- c) On a $\lim_0 h = \alpha$ donc $\lim_{t \rightarrow 0} \sqrt{t}g'(t) = \lim_0 \left(f' - \frac{1}{2}h \right)$, ie $\boxed{\lim_{t \rightarrow 0} \sqrt{t}g'(t) = \frac{\alpha}{2}}$

$$g'(t)g(t) = \sqrt{t}g'(t) \times h(t) \text{ donc } \boxed{\lim_0 gg' = \frac{\alpha^2}{2}}$$

- d) Les fonctions f' , $t \mapsto \sqrt{t}g'(t)$ et h sont continues sur $]0, x]$ et prolongeables par continuité en 0 donc sont toutes de carré intégrable sur $]0, x]$.

Si $t > 0$, on a $f'(t) = \sqrt{t}g'(t) + \frac{1}{2}h(t)$ donc $f'(t)^2 = (\sqrt{t}g'(t))^2 + \sqrt{t}g'(t)h(t) + \frac{1}{4}h(t)^2$ et on vérifie l'égalité $\sqrt{t}g'(t)h(t) = g'(t)g(t) = \frac{1}{2}(g^2)'(t)$ donc en intégrant entre 0 et x , comme $\lim_0 g = 0$, on obtient la relation (R) :

$$\boxed{\int_0^x f'(t)^2 dt = \frac{1}{2}g(x)^2 + \int_0^x (\sqrt{t}g'(t))^2 dt + \frac{1}{4} \int_0^x h(t)^2 dt}$$

2. a) Soit $f \in E_2$, on déduit de (R), $\int_0^x (h(t))^2 dt \leq 4 \int_0^x (f'(t))^2 dt \leq 4 \int_0^{+\infty} (f'(t))^2 dt$ car $(f')^2 \geq 0$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$. On en déduit que la fonction $x \mapsto \int_0^x (h(t))^2 dt$ est majorée sur $\mathbb{R}^{+*}$. Comme $h^2 \geq 0$, on en déduit que h^2 est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ donc $f \in E_1$, ce qui prouve $E_2 \subset E_1$
- b) Si $f = \sin$ ($\in E_0$), on a $h(t) = \frac{\sin t}{t}$ qui est continue sur $]0, +\infty[$; de plus $\lim_0 (h^2) = 1$ donc h^2 est intégrable sur $]0, 1]$ et $h(t)^2 = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc h^2 est intégrable sur $[1, +\infty[$, ce qui donne $\sin \in E_1$.
- Par contre $f' = \cos$, donc on vérifie que $(f')^2$ n'est pas intégrable sur $]0, +\infty[$: $f'(t)^2 = \cos^2(t) = \frac{1 + \cos 2t}{2}$ donc $\int_\pi^x f'(t)^2 dt = \frac{1}{2} \left[t + \frac{\sin 2t}{2} \right]_\pi^x = \frac{x - \pi}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x$ n'a pas de limite finie en $+\infty$ donc $\sin \notin E_1$ ce qui confirme bien que $E_1 \not\subset E_2$
3. a) On a $E_2 \subset E_0$ par définition de E_2 , $0 \in E_2$ et si $(f, g) \in E_2$, on a $|f'g'| \leq \frac{1}{2} ((f')^2 + (g')^2)$ donc $f'g'$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$. Ainsi, si $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, on a $(\alpha f' + \beta g')^2 = \alpha^2 (f')^2 + 2\alpha\beta f'g' + \beta^2 (g')^2$ donc $(\alpha f' + \beta g')^2$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et E_2 est un sous-espace vectoriel de E_0
- b) On a, d'après (R), $\int_0^x h(t)^2 dt \leq 2 \int_0^x f'(t)^2 dt$ donc en faisant tendre x vers $+\infty$, on obtient $N_1(f) \leq 2N_2(f)$
- c) f_n est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et vérifie $f_n(0) = 0$ donc $f_n \in E_0$. De plus $f'_n(t) = -e^{-t} \sin(nt) + ne^{-t} \cos(nt)$ donc $(f'_n)^2$ est continue sur $[0, +\infty[$ et $f'_n(t)^2 = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc $(f'_n)^2$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ donc $f_n \in E_2$
- $f'_n(t)^2 = e^{-2t} (\sin^2(nt) - 2n \sin(nt) \cos(nt) + n^2 \cos^2(nt)) = e^{-2t} \left(\frac{1+n^2}{2} - n \sin(2nt) + \frac{(n^2-1) \cos(2nt)}{2} \right)$
- donc $f'_n(t)^2 = \frac{1+n^2}{2} e^{-2t} - n \operatorname{Im} (e^{-2(1-in)t}) + \frac{n^2-1}{2} \operatorname{Re} (e^{-2(1-in)t})$. Comme $|e^{-2(1-in)t}| = e^{-2t}$, la fonction $t \mapsto e^{-2(1-in)t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et on obtient $N_2(f_n)^2 = \frac{1+n^2}{4} - n \operatorname{Im} \left(\frac{1}{2(1-in)} \right) + \frac{n^2-1}{2} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2(1-in)} \right)$
- donc $N_2(f_n)^2 = \frac{1+n^2}{4} - \frac{n^2}{2(1+n^2)} + \frac{n^2-1}{2} \times \frac{1}{2(1+n^2)}$ puis $N_2(f_n) = \frac{n}{2}$
- d) On a $N_1(f_n)^2 = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(nt)}{t} \right)^2 e^{-2t} dt$; on pose $t = \frac{u}{n}$, $u \mapsto \frac{u}{n}$ est une bijection $\mathcal{C}^1$ strictement croissante de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$, et on obtient $N_1(f_n)^2 = n \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2 e^{-u/n} du \leq n \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2 du$ (intégrabilité déjà prouvée) donc $N_1(f_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(\sqrt{n})$
- S'il existait une constante $C > 0$ telle que $N_2 \leq CN_1$, on aurait $N_2(f_n) \leq CN_1(f_n)$, ie $\frac{n}{2} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(\sqrt{n})$, ce qui est faux.
4. $t \mapsto \sqrt{t}g'(t)$ est prolongeable par continuité à $\mathbb{R}^+$, et d'après (R), $\int_0^x (\sqrt{t}g'(t))^2 dt \leq \int_0^x (f'(t))^2 dt \leq N_2(f)^2$.
- Comme $t \mapsto (\sqrt{t}g'(t))^2 \geq 0$, cette majoration prouve que $t \mapsto (\sqrt{t}g'(t))^2$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$.
- Les trois fonctions $x \mapsto \int_0^x f'(t)^2 dt$, $x \mapsto \int_0^x (\sqrt{t}g'(t))^2 dt$ et $\int_0^x h(t)^2 dt$ admettent une limite finie en $+\infty$ donc g^2 admet une limite ℓ en $+\infty$. Comme $f \in E_2 \subset E_1$, g^2 est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$, ce qui impose $\ell = 0$ donc $\lim_{+\infty} g = 0$

Exercice :

1. a) On a $X_0 = P_1 \cap P_2 \in \mathcal{A}$ et par indépendance de P_1 et P_2 , $P(X_0) = P(P_1)P(P_2)$ donc $P(X_0) = \frac{4}{9}$
- Puis $X_1 = (F_1 \cap P_2 \cap P_3) \cup (P_1 \cap F_2 \cap P_3) \in \mathcal{A}$ puis par incompatibilité de $F_1 \cap P_2 \cap P_3$ et $P_1 \cap F_2 \cap P_3$, on a $P(X_1) = P(F_1 \cap P_2 \cap P_3) + P(P_1 \cap F_2 \cap P_3) = P(F_1)P(P_2)P(P_3) + P(P_1)P(F_2)P(P_3)$ par indépendances; on en déduit $P(X_1) = \frac{8}{27}$
- De même, on a $X_2 = (F_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4) \cup (F_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap P_4) \cup (P_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap P_4) \in \mathcal{A}$ et, à nouveau par incompatibilité deux à deux, puis indépendance, $P(X_2) = \frac{4}{27}$
- b) E_n est le temps d'attente du premier succès dans la répétition indépendante d'épreuve de Bernoulli (« obtenir Pile ») de paramètre $\frac{2}{3}$ donc $P(E_n) = \frac{2}{3} \left(1 - \frac{2}{3}\right)^{n-1}$ puis $P(E_n) = \frac{2}{3^n}$ Les $(E_n)_{n \geq 1}$ constituent un système

quasi-complet d'événements donc, d'après la formule des probabilités totales, on a $P(X_n) = \sum_{k=1}^{+\infty} P_{E_k}(X_n)P(E_k)$.

Pour $k \geq n+2$, on a $P_{E_k}(X_n) = 0$ car si le premier Pile intervient au $k^{\text{ème}}$ lancer avec $k \geq n+2$, on ne pourra pas avoir un deuxième Pile au $(n+2)^{\text{ème}}$ lancer. On a donc $P(X_n) = \sum_{k=1}^{n+1} P_{E_k}(X_n)P(E_k)$. Enfin, si on suppose

E_k réalisé (donc le premier Pile au $k^{\text{ème}}$ lancer), la probabilité que le deuxième Pile apparaisse au $(n+2)^{\text{ème}}$ lancer est la même que le premier Pile apparaisse au $(n+2-k)^{\text{ème}}$ lancer (une fois le premier Pile obtenu, on peut considérer que l'expérience reprend au début et que l'on attend à nouveau le premier Pile). On en déduit

$$\text{donc } P(X_n) = \sum_{k=1}^{n+1} P(E_{n+2-k})P(E_k)$$

c) On en déduit $P(X_n) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{2}{3^k} \times \frac{2}{3^{n+2-k}} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{4}{3^{n+2}}$ donc $P(X_n) = (n+1) \frac{4}{3^{n+2}}$

2. a) Si X_n est réalisé, on peut tirer une boule dont le numéro sera dans $[[0, n]]$ mais comme l'entier n pour lequel X_n est réalisé est quelconque, le numéro de la boule tirée peut être n'importe quel entier de $\mathbb{N}$.
b) Si X_n est réalisé, on ne peut pas tirer une boule dont le numéro k est $> n$. Par contre si $k \leq n$ la probabilité

de tirer une boule donnée étant uniforme, on a $P_{X_n}(U_k) = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

- c) On commence par vérifier que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un système quasi-complet : les X_n sont deux à deux incompatibles et $\sum_{n=0}^{+\infty} P(X_n) = \frac{4}{9} \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{4}{9} \times \frac{1}{(1-\frac{1}{3})^2} = 1$. Par la formule des probabilités totales, on a

$$P(U_k) = \sum_{n=1}^{+\infty} P_{X_n}(U_k)P(X_n) = \sum_{n=k}^{+\infty} P_{X_n}(U_k)P(X_n) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1} P(X_n) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{4}{3^{n+2}} \stackrel{h=n-k}{=} \frac{4}{3^{k+2}} \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{4}{3^h} \text{ donc}$$

$$P(U_k) = \frac{2}{3^{k+1}}$$

- d) Si X_n est réalisé, l'événement V_k sera lui aussi réalisé si le numéro de la boule tirée est $n-k$ (ce qui impose

donc $n-k \geq 0$) donc $P_{X_n}(V_k) = P_{X_n}(U_{n-k})$ donc $P_{X_n}(V_k) = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ On en déduit donc par le

même calcul que $P(V_k) = \frac{2}{3^{k+1}}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ Là encore toutes les valeurs entières sont possibles puisque n est un entier quelconque et le numéro de la boule tirée peut toujours être 0 donc k est un entier de $\mathbb{N}$.

- e) L'événement $U_k \cap V_h$ correspond au cas où la boule tirée porte le numéro h et où on a obtenu $k+h$ Face donc on a $U_k \cap V_h = X_{k+h} \cap U_k$. Ainsi, $P(U_k \cap V_h) = P(U_k \cap X_{k+h}) = P_{X_{k+h}}(U_k)P(X_{k+h}) = \frac{1}{k+h+1} \times (k+h+1) \frac{4}{3^{k+h+2}}$ et comme $P(U_k)P(V_h) = \frac{2}{3^{k+1}} \times \frac{2}{3^{h+1}}$, on a $P(U_k \cap V_h) = P(U_k)P(V_h)$ donc U_k et V_h sont indépendants

3. a) La probabilité que le joueur B obtienne Face pour la première fois au $n^{\text{ème}}$ tirage est $p(1-p)^{n-1}$ (temps d'attente du premier succès) donc $P(B_n) = p(1-p)^n$ car le joueur B aura n Face (exactement) si le premier Pile apparaît au tirage $n+1$. On a $Y_n = \bigcup_{k \geq n} B_k$, les événements de cette réunion étant deux à deux incompatibles, on a

$$P(Y_n) = \sum_{k=n}^{+\infty} p(1-p)^k \stackrel{h=n-k}{=} \sum_{h=0}^{+\infty} p(1-p)^{n+h} = p(1-p)^n \times \frac{1}{1-(1-p)} \text{ donc } P(Y_n) = (1-p)^n$$

- b) Les $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ constituent un système quasi-complet d'événements donc, d'après la formule des probabilités totales, on a $P(G_A) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_{X_n}(G_A)P(X_n)$. Si X_n est réalisé, le joueur A a obtenu n Face donc il gagne si B

obtient au moins n Face ; on en déduit $P_{X_n}(G_A) = P(Y_n)$ et $P(G_A) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X_n)P(Y_n)$

c) On a $P(G_A) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \frac{4}{3^{n+2}} (1-p)^n = \frac{4}{9} \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \left(\frac{1-p}{3}\right)^n = \frac{4}{9} \times \frac{1}{[1-(\frac{1-p}{3})]^2}$ donc $P(G_A) = \left(\frac{2}{2+p}\right)^2$

- d) Le jeu est équitable si et seulement si $P(G_A) = P(G_B) = \frac{1}{2}$ (car B gagne si A ne gagne pas d'après le texte) donc si et seulement si $\frac{2}{2+p} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ donc si et seulement si $p = 2(\sqrt{2}-1)$