

On note $\mathcal{E}$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour tout élément f de $\mathcal{E}$, on note $U(f)$ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, U(f)(x) = \int_{x-1}^x f(t) dt$$

1. Soit $f \in \mathcal{E}$, T -périodique. Montrer que $\forall a \in \mathbb{R}, \int_a^{a+T} f(t) dt = \int_0^T f(t) dt$.
2. On suppose de plus dans cette question que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
 - a) Démontrer que si f est T -périodique, il en est de même pour f' .
 - b) Montrer que la réciproque est fausse
3. Montrer que la fonction $U(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
4. Montrer que l'application U qui à $f \in \mathcal{E}$ associe $U(f)$ est un endomorphisme de $\mathcal{E}$.
5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ et $\mathcal{B}_n = (1, X, \dots, X^n)$ sa base canonique.
 - a) Montrer que la restriction de U à E_n définit un endomorphisme U_n de E_n .
 - b) Écrire la matrice de U_n dans la base $\mathcal{B}_n$.
 - c) L'endomorphisme U_n est-il bijectif?
 - d) Déterminer les valeurs propres et la dimension des espaces propres de U_n . Existe-t-il une base de E_n dans laquelle la matrice de U_n est diagonale?
6. Justifier que si f , élément de $\mathcal{E}$, est dans $\ker(U)$ alors :
 - a) $\int_0^1 f(t) dt = 0$.
 - b) f est périodique de période 1.
7. A-t-on $\ker(U) = \left\{ f \in \mathcal{E}, \text{ périodique de période 1 et telle que } \int_0^1 f(t) dt = 0 \right\}$?
8. Donner explicitement une fonction f , non nulle, élément de $\ker(U)$.
9. L'endomorphisme U est-il surjectif?
10. Soit a un réel non nul et f_a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_a : t \mapsto e^{at}$.
 - a) Déterminer $F_a = U(f_a)$.
 - b) Dresser le tableau de variations de la fonction réelle $g : x \mapsto \frac{e^x - 1}{x}$.
 - c) Montrer que tout réel λ strictement positif est valeur propre de U .