

Exercice 1

Diagonaliser $A = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}$

Exercice 2 (Mines-Télécom PSI 2024)

Soient E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$, ℓ une forme linéaire non nulle sur E , $a \in E$ non nul et f définie par $f(x) = \ell(x)a - \ell(a)x$

1. Montrer que f est un endomorphisme de E qui s'annule en a .
2. Justifier que si $\ell(a) \neq 0$ et $f(x) = 0$ alors $x \in \text{Vect}\{a\}$.
3. Calculer $f(x)$ si $\ell(x) = 0$
4. f est-il diagonalisable ?
5. Déterminer $\mathcal{X}_f$ et $\text{Tr}(f)$.

Exercice 3 (Mines-Télécom PSI 2023)

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ 4 & 8 & -12 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le rang de A .
2. En déduire sans calcul le polynôme caractéristique.
3. Déterminer les éléments propres de A .
4. A est-elle diagonalisable ?

Exercice 4 (CCINP PSI 2023)

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $M_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$

1. Déterminer $\mathcal{X}_{M_\alpha}$ et les valeurs propres de M_α
2. M_α est-elle diagonalisable ? Si oui, P inversible et D diagonale telles que $M_\alpha = PDP^{-1}$
3. M_α est-elle inversible ?
4. Lorsque M_α n'est pas inversible, déterminer des bases de $\ker(M_\alpha)$ et $\text{Im}(M_\alpha)$.

Exercice 5 (CCINP PSI 2023)

Soit $A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $a_{i,j} = \begin{cases} i & \text{si } i = j \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$ On note P_n le polynôme caractéristique de A_n .

1. Donner le spectre de A_2
2. Montrer que, pour $n \geq 3$, $P_n = (X - n + 1)P_{n-1} - X(X - 1) \dots (X - n + 2)$
3. Montrer que $\forall k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$, $(-1)^{n-k}P_n(k) > 0$ et en déduire que A_n possède une valeur propre dans chacun des intervalles $]0, 1[,]1, 2[, \dots,]n - 2, n - 1[$. (*)
4. En déduire que A_n est diagonalisable.

Exercice 6

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Déterminer les sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ stables par A . (*)

Exercice 7 (CCINP PSI 2024)

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose $M_\alpha = \begin{pmatrix} 1 + 2\alpha & 9 - 2\alpha & -2\alpha \\ 0 & 4 & 0 \\ \alpha & 6 - \alpha & 1 - \alpha \end{pmatrix}$

1. Étudier la diagonalisabilité de M_α
2. Déterminer $\text{rg}(M_\alpha)$
3. Déterminer $P \in \mathcal{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que $M_{-1} = P\Delta P^{-1}$ avec $\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$
4. On cherche à résoudre $A^2 = M_{-1}$ et on pose $B = P^{-1}AP$
 - a) Montrer que $A^2 = M_{-1} \Leftrightarrow B^2 = \Delta$

- b) Montrer que si $B^2 = \Delta$ alors B et Δ commutent
- c) En déduire les matrices B telles que $B^2 = \Delta$
- d) Résoudre $A^2 = M_{-1}$

Exercice 8 (CCINP PSI 2024)

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ avec $n \geq 1$

1. Montrer que si u est diagonalisable alors u^2 est diagonalisable
2. Montrer que la réciproque est fausse
3. Pour $\lambda \in \mathbb{C}^*$, montrer $\ker(u^2 - \lambda^2 id) = \ker(u - \lambda id) \oplus \ker(u + \lambda id)$
4. Montrer que la réciproque de la question 1 est vraie si u est bijectif ou si $\ker(u) = \ker(u^2)$.

Indications

Exercice 5

3. Commencer par une récurrence sur n

Exercice 6

Si P est un plan stable par f_A , chercher ce que peut être le polynôme caractéristique de l'endomorphisme induit par f_A sur P .