

TD10 : Réduction

Exercice 1 (Mines-Télécom PSI 2024)

Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

1. Diagonaliser A
2. Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $M^2 + M = A$
 - a) Montrer que $\text{Sp}(M) \subset \{1, -2, 2, -3\}$
 - b) Déterminer les matrices M telles que $M^2 + M = A$

Exercice 2 (CCP PSI 2012)

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $\det(A) = 10$, $\text{Tr}(A) = -6$ et $A - I_3 \notin \mathcal{GL}_3(\mathbb{R})$. Exprimer A^{-1} comme un polynôme en A . (*)

Exercice 3 (CCINP PSI 2024)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, non nulle, telle que $A^3 + 9A = 0$, $n \geq 3$.

1. Montrer que $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \{0, 3i, -3i\}$
2. A est-elle diagonalisable dans $\mathbb{R}$? Dans $\mathbb{C}$?
3. Montrer que si n est impair alors A n'est pas inversible.

Exercice 4 (CCP PSI 2023)

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et P annulateur de A ; montrer que les valeurs propres de A sont des racines de P .
2. Existe-t-il $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $\text{Tr}(A) = 0$ et $A^2 + A^T = I_3$? (*)

Exercice 5 (Mines-Télécom PSI 2023)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 - 3A - 5I_n = 0$. Montrer que $\det(A) > 0$. (*)

Exercice 6

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, non nulles, et $\varphi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto M + \text{Tr}(AM)B$.

1. Montrer que φ est linéaire.
2. φ est-il diagonalisable? (*)
3. Déterminer $\det(\varphi)$ et $\text{Tr}(\varphi)$

Exercice 7 (Centrale PSI 2014)

1. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que $B = \begin{pmatrix} A & 4A \\ A & A \end{pmatrix}$ est semblable à $\begin{pmatrix} -A & 0 \\ 0 & 3A \end{pmatrix}$. (*)
2. Montrer que B est diagonalisable si et seulement si A l'est.

Exercice 8 (CCINP PSI 2024)

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$.

1. Montrer que, pour $P \in \mathbb{C}[X]$, $P(B) = \begin{pmatrix} P(A) & P(A) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + P(0) \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$.
2. Déterminer $\text{rg}(B)$ en fonction de $\text{rg}(A)$.
3. On suppose A diagonalisable. Montrer que B est diagonalisable. (*)
4. Étudier la réciproque.

Exercice 9 (Centrale PSI 2023)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et B la matrice par blocs définie par : $B = \begin{pmatrix} A & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$.

1. Exprimer $\mathcal{X}_B$ en fonction de $\mathcal{X}_A$. (*)
2. Montrer que si A diagonalisable alors B est diagonalisable. (*)

Exercice 10 (Mines-Ponts PSI 2024)

1. Soit A une matrice carrée d'ordre n , montrer l'équivalence entre les deux propositions (*)
 - i) A est nilpotente
 - ii) $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(A^2) = \dots = \text{Tr}(A^n) = 0$
2. Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n telles que $AB - BA = B$. Montrer que B est nilpotente. (*)

Indications

Exercice 2

trouver $\mathcal{X}_A$.

Exercice 4

- trouver un polynôme annulateur de A (de degré 4); la réponse est qu'une telle matrice n'existe pas*

Exercice 5

étudier $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ et chercher si les vp sont réelles ou non (étude de fonction).

Exercice 6

- $M \mapsto \text{Tr}(AM)$ est une forme linéaire non nulle (à vérifier).*

Exercice 7

- Utiliser la diagonalisation de $M = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (et les coefficients des matrices P et P^{-1} , à déterminer) pour diagonaliser B par blocs*

Exercice 8

- Distinguer les cas $0 \in \text{Sp}(A)$ et $0 \notin \text{Sp}(A)$ pour construire un polynôme annulateur de B*

Exercice 9

- On peut supposer $\lambda \neq 0$ pour pouvoir simplifier le déterminant.*
- On peut faire le même genre de calculs pour le rang.*

Exercice 10

- Commencer par calculer les traces en fonction des valeurs propres de A , en introduisant les valeurs propres distinctes et leurs ordres de multiplicité.*
- Déterminer $AB^k - B^k A$.*