I Étude de suites de fonctions

Exercice 1 *[Solution]*
Étudier la convergence simple, uniforme, uniforme sur tout segment des suites de fonctions :

1. $f_n(x) = \arctan\left(\dfrac{x}{n}\right)$, $n \geqslant 1$, sur $\mathbb{R}$.

2. $f_n(x) = \dfrac{n^a \sin\left(\frac{x}{n}\right) - 1}{n^a \sin\left(\frac{x}{n}\right) + 1}$ sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, où $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 2 (CCP MP 2012) *[Solution]*
On pose $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{1 + n^2x^2}$. Montrer que (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}^+$. Etudier la convergence uniforme sur $[a, +\infty[$, avec $a > 0$, puis sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Exercice 3 (Mines-Ponts PSI 2012) *[Solution]*
On pose $f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{2n^2x^2 - nx - 1}{2n^2x + 1} \sin^2 \dfrac{\pi}{x} & \text{si } x \in \left[\dfrac{1}{n}, 1\right] \\ 0 & \text{si } x \in \left[0, \dfrac{1}{n}\right[\end{cases}$ Etudier les convergences simple et uniforme de (f_n) sur $[0, 1]$.

Exercice 4 (CCP PSI 2016) *[Solution]*
Soit $f_n(x) = \cos\left[\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) x\right]$.

1. Etudier la convergence simple de la suite (f_n).

2. Y a-t-il convergence uniforme sur tout segment de $\mathbb{R}$? Sur $\mathbb{R}$?

Exercice 5 (CCINP PSI 2024) *[Solution]*
Pour $x \in [0, 1]$ et $n \geqslant 0$, on pose $f_n(x) = \sin\left(nxe^{-nx^2}\right)$.

1. Étudier la convergence simple de (f_n) sur $[0, 1]$

2. Étudier la convergence uniforme de (f_n) sur $[a, 1]$, avec $a \in]0, 1]$, puis sur $[0, 1]$

Exercice 6 (CCINP PSI 2021) *[Solution]*
On pose $f_n(x) = \dfrac{nx^2}{1 + nx}$ si $x \geqslant 0$ et $f_n(x) = \dfrac{nx^3}{1 + nx^2}$ si $x < 0$.

1. Montrer que (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers f à déterminer.

2. Montrer que (f'_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ mais ne converge pas uniformément sur $[-1, 1]$.

Exercice 7 (Mines-Ponts PSI 2023) *[Solution]*
Pour $n \geqslant 1$ et $x \in [0, 1]$, on pose $f_n(x) = \dfrac{e^{-x}}{1 + n^2x^2}$

1. Étudier la convergence simple de (f_n) sur $[0, 1]$

2. Soit $a \in]0, 1[$, a-t-on convergence uniforme sur $[a, 1]$?

3. Étudier la convergence uniforme de (f_n) sur $[0, 1]$

4. On pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(t)\, dt$. Déterminer la limite de (u_n).

5. Étudier la convergence de $\sum f_n$.

Exercice 8 (CCINP PSI 2022) *[Solution]*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et g_n définie sur $[0, 1]$ par $g_n(t) = e^t \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n$.

1. Montrer que pour tout réel $t \in [0, 1]$, $|g'_n(t)| \leqslant \dfrac{e^t}{n}$ puis que $\left|1 - e^t \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n\right| \leqslant \dfrac{te^t}{n}$.

2. Étudier la convergence uniforme sur $[0, 1]$ de la suite de fonctions $I_n(x) = \displaystyle\int_0^x e^t \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n dt$.

Exercice 9 (Mines-Ponts PSI 2014) *[Solution]*
Pour $t \in [0, 1]$, on pose $f_0(t) = 0$ et $f_{n+1}(t) = f_n(t) + \dfrac{1}{2}(t - f_n(t)^2)$. Étudier les convergences simples et uniformes de (f_n) sur $[0, 1]$.

Exercice 10 **(Centrale PSI 2023)** *[Solution]*
Pour $x \in [0,1]$, on définit g sur $[0,1]$ par $\forall y \in [0,1], g(y) = y - \dfrac{x}{2}y^2$

1. Montrer que g est 1-lipschitzienne et que $[0,1]$ est stable par g
2. On définit la suite de fonctions $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $h_0 = 1$ et $\forall x \in [0,1], \forall n \in \mathbb{N}, h_{n+1}(x) = h_n\left(\dfrac{x}{2}\right) - \dfrac{x}{2}h_n\left(\dfrac{x}{2}\right)^2$
   a) Montrer que $\forall x \in [0,1], h_n(x) \in [0,1]$
   b) Montrer que $|h_{n+1}(x) - h_n(x)| \leqslant \left|h_n\left(\dfrac{x}{2}\right) - h_{n-1}\left(\dfrac{x}{2}\right)\right|$
   c) En déduire que $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,1]$
   indication : prouver $|h_{n+1}(x) - h_n(x)| \leqslant \left|h_1\left(\dfrac{x}{2^n}\right) - h_0\left(\dfrac{x}{2^n}\right)\right|$ *; pour la CVU, utiliser* $f - h_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} h_{k+1} - h_k$
3. Justifier qu'il existe une fonction f continue sur $[0,1]$, telle que $f(0) = 1$ et $\forall x \in [0,1], f(x) = f\left(\dfrac{x}{2}\right) - \dfrac{x}{2}f\left(\dfrac{x}{2}\right)^2$

Exercice 11 **(Centrale PSI 2023)** *[Solution]*

1. Justifier l'existence, pour $x \in \mathbb{R}$, et déterminer la valeur de $\varphi(x) = e^x\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t}\cos(t)\,\mathrm{d}t$ et $\psi(x) = e^x\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t}\sin(t)\,\mathrm{d}t$
2. Déterminer les solutions bornées sur $\mathbb{R}$ de $y' - y + \cos(x) = 0$
   indication : φ *est une solution de l'équation*
3. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $f_0 = a\cos + b\sin$ et, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, $f_{n+1}(x) = e^x\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t}f_n(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément.
   indication : prouver $f_n = \alpha_n\cos + \beta_n\sin$ *puis déterminer* α_n *et* β_n

Exercice 12 **(Centrale PSI 2022)** *[Solution]*
Soit $f \in \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R})$. On pose $B_n(f)(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$, et $S_{n,r}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}(k-nx)^r$, pour $x \in [0,1]$.

1. Citer la formule de Taylor avec reste intégral
2. Montrer que $S_{n,0}(x) = 1$ et $S_{n,1}(x) = 0$
   On admet $S_{n,2}(x) = nx(1-x)$
3. Montrer qu'il existe $M \geqslant 0$ tel que $|B_n(f)(x) - f(x)| \leqslant \dfrac{Mx(1-x)}{2n}$ pour $x \in [0,1]$.
   En déduire que $(B_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[0,1]$

II Modes de convergence des séries de fonctions

Exercice 13 *[Solution]*
Étudier la convergence simple puis la convergence normale des séries de terme général

1. $u_n(x) = x^a(1-x)^{nb}n^c$ sur $[0,1]$ où $(a,b,c) \in \left(\mathbb{R}^{+*}\right)^3$.
2. $u_n(x) = nx^\alpha e^{-nx^2}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 14 **(Mines-Ponts PSI 2019)** *[Solution]*

1. Convergence simple puis uniforme sur $[0,1]$ de la suite $f_n(x) = n^\alpha x(1-x)^n$
2. Convergence simple puis uniforme de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$.

Exercice 15 **(CCINP PSI 2019)** *[Solution]*

1. Trouver les x tels que la suite (f_n), $f_n(x) = xe^{-\sqrt{n|x|}}$ converge ; calculer $\|f_n\|_\infty$, que peut-on en déduire ?
2. Déterminer le domaine de convergence D de $\sum f_n$. La convergence est-elle absolue sur D ? Normale ? Que dire de la convergence sur $\mathbb{R}\backslash]-a,a[$, avec $a > 0$?

Exercice 16 **(IMT PSI 2019)** *[Solution]*
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $g_n(x) = \sin(x)\cos^n(x)$ et $f_n(x) = xg_n(x)$ avec $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$

1. Étudier les variations de g_n.
2. Étudier la suite (f_n) puis la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n$.

Exercice 17 **(Mines-Ponts MP 2010)** *[Solution]*

1. Si $\alpha > 0$, on pose $u_n(x) = \sin^\alpha x \cos^n x$; montrer que $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ converge simplement sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et calculer sa somme.
2. À quelle condition sur α y a-t-il convergence normale ? uniforme ?

Exercice 18 **(CCP PSI 2016)** *[Solution]*

Soit $f_n(x) = x^n \dfrac{e^{-x}}{n!}$ pour $x \geqslant 0$.

1. Montrer la convergence simple puis uniforme de la suite (f_n) sur $\mathbb{R}^+$.
2. Étudier la série $\sum f_n$.

Exercice 19 **(CCINP PSI 2019)** *[Solution]*

1. Montrer que, pour $t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, $|\ln(1+t) - t| \leqslant 2t^2$
2. Étudier la convergence simple et uniforme de $\sum_{n \geqslant 1} \ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n x}{n(1+x^2)}\right)$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 20 *[Solution]*

on pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{x^{\ln n}}$.

1. Étudier la convergence simple de $\sum f_n$.
2. Étudier la convergence normale de $\sum f_n$.
3. Étudier la convergence uniforme de $\sum f_n$ sur $[a, +\infty[\subset]1, +\infty[$. Qu'en déduire pour la somme f de cette série ?
4. Calculer $\lim_{n \to +\infty} \left| f_n\left(1 + \frac{1}{n}\right) \right|$. Que dire de la convergence uniforme de $\sum f_n$ sur $]1, +\infty[$?
   indication : que dire de $\|f_n\|_\infty$ si $\sum f_n$ converge uniformément ?

III Continuité, limites, équivalents de sommes de séries

Exercice 21 **(Mines-Télécom PSI 2018)** *[Solution]*

1. Montrer que pour $x \in I =]-1, +\infty[$, $S(x) = \sum_{n \geqslant 1} \left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+x}\right)$ existe.
2. Montrer que S est continue sur I.
3. Montrer que $S(x+1) - S(x) = \dfrac{1}{x+1}$ et en déduire un équivalent de S et -1^+.
4. La série converge-t-elle normalement sur I ?

Exercice 22 **(CCINP PSI 2021)** *[Solution]*

Soit $f(x) = \sum_{n \geqslant 1} \dfrac{x}{n^{x+1}}$

1. Déterminer le domaine de définition D de f.
2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$
3. Étudier la continuité de f en 0.
4. Déterminer la limite de $f(x) - x$ en $+\infty$.

Exercice 23 **(CCINP PSI 2021)** *[Solution]*

On pose, pour $n \geqslant 2$ et $x > 0$, $u_n(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^n \ln(n)}$.

1. Déterminer le domaine de convergence de $\sum u_n(x)$.
2. Montrer que $\sum u_n$ ne converge pas normalement sur ce domaine.
3. On pose $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)$; montrer que $|R_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{\ln(n+1)}$ puis montrer que la somme de la série $\sum u_n$ est continue sur son domaine de convergence.

Exercice 24 **(Mines-Télécom PSI 2024)** *[Solution]*

Pour $n \geqslant 2$, on pose $f_n(x) = \dfrac{xe^{-nx}}{\ln n}$ et $S(x) = \sum_{n\geqslant 2} f_n(x)$

1. Déterminer le domaine de définition de S.
2. Montrer que S est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.
3. Montrer que S est continue en 0.
   indication : CVU sur $\mathbb{R}^+$

Exercice 25 **(Mines-Ponts PSI 2017)** *[Solution]*

1. Étudier les convergences simple et uniforme de $\sum_{n\geqslant 0} \dfrac{e^{-nx}}{1+n}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
   indication : utiliser $R_n(1/n)$.
2. On note f la somme de la série précédente ; est-elle continue ? dérivable ?
3. Donner ses limites en 0 et $+\infty$.

Exercice 26 **(Centrale PSI 2014)** *[Solution]*

1. Existence et continuité sur $\mathbb{R}^{+*}$ de $f(x) = \sum_{n\geqslant 1} x^{2-\alpha} e^{-nx}$ pour $\alpha \in [0, 2[$.
2. Trouver une CNS pour que la série converge normalement sur $\mathbb{R}^+$.
3. Si $\alpha = 1$, y a-t-il convergence uniforme ?

Exercice 27 *[Solution]*

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on définit $u_k : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ par $u_k(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [1, k] \\ \left(1 - \dfrac{k}{t}\right)^t & \text{si } t > k \end{cases}$

1. Montrer que $\sum u_k$ converge normalement sur $[1, +\infty[$.
2. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\dfrac{k}{n}\right)^n$. *(indication : commencer poser* $p = n - k$*)*

Exercice 28 *[Solution]*

Soit $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{\mathrm{sh}(nx)}$

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Montrer que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} 2e^{-x}$.
3. Mêmes questions pour $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{\mathrm{sh}^2(nx)}$.

Exercice 29 **(CCINP PSI 2024)** *[Solution]*

Pour $x \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = \dfrac{1}{\mathrm{sh}(nx)}$

1. Déterminer les valeurs de x pour lesquelles $\sum f_n(x)$ converge.

On pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$

1. Déterminer le domaine de continuité de f
2. Étudier les variations de f
3. Montrer que pour u grand on a $\mathrm{sh}(u) \geqslant e^{u/2}$
4. Montrer que $f(x)$ est équivalente à $\dfrac{1}{\mathrm{sh}\, x}$ au voisinage de $+\infty$.

Exercice 30 **(CCP PSI 2023)** *[Solution]*

1. Ensemble de définition de $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{a^n}{x+n}$, en fonction de a ?
2. On suppose $|a| < 1$ jusqu'à la fin de l'exercice, montrer que S est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.
3. Déterminer une relation entre $S(x+1)$ et $S(x)$ et en déduire un équivalent de S en 0.

4. Montrer que $xS(x)$ tend vers $\dfrac{1}{1-a}$ quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 31 **(CCP PSI 2018)** *[Solution]*
On note $f_n(x) = e^{-x\sqrt{n}}$ et $f(x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$.

1. Donner l'ensemble de définition D de f.

2. Pour $a > 0$, montrer la convergence normale sur $[a, +\infty[$ puis étudier la convergence normale sur D.

3. f est-elle continue sur D ? Déterminer sa limite en $+\infty$.

4. Montrer que $\displaystyle\int_n^{n+1} e^{-x\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \leqslant e^{-x\sqrt{n}} \leqslant \int_{n-1}^{n} e^{-x\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ et en déduire que $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{2}{x^2}$.

Exercice 32 **(Mines-Télécom PSI 2023)** *[Solution]*
Soit $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}$

1. Déterminer le domaine de définition de f

2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$

3. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^k}\right)$

Exercice 33 **(Mines-Ponts PSI 2022)** *[Solution]*
On donne $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-n^2x^2}$.

1. Domaine de définition et continuité de f.

2. Donner la limite de $f(x)$ quand $x \to +\infty$.

3. Donner un équivalent de $f(x)$ quand $x \to 0^+$.

Exercice 34 **(ENSAM PSI 2018)** *[Solution]*
Soit $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$.

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$.

2. Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et étudier ses variations.

3. Calculer $f(x) + f(x+1)$ et en déduire des équivalents de f en 0^+ et $+\infty$.
indication : pour l'équivalent en $+\infty$, encadrer $f(x)$ avec la valeur de $f(x) + f(x+1)$ et la monotonie de f.

Exercice 35 **(CCINP PSI 2024)** *[Solution]*
Soit $g_n(y) = \dfrac{(-1)^n}{n + (\ln(n))^y}, y \in \mathbb{R}$

1. Étudier la convergence $\sum g_n$.
indication : montrer que le CSSA est vérifié pour $n \geqslant -y$ dans le cas $y < 0$.

2. Lorsqu'elle existe étudier la continuité de $F(y) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+(\ln(n))^y}$

Exercice 36 **(Mines-Télécom PSI 2024)** *[Solution]*
Soit $f(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{1+(-1)^n n}$
Déterminer le domaine de définition de f et montrer que f est continue.
indication : pour la continuité en 0, examiner $f(x) - f(0)$.

Exercice 37 **(ENSAM PSI 2018)** *[Solution]*
Soit $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^n}$ lorsque la série converge.

1. Montrer que f est définie, continue et $\mathcal{C}^1$ sur $]-1, 1[$.

2. Pour $x \in [0, 1[$, on pose $\varphi_x(t) = \dfrac{x^t}{1-x^t}$. Montrer que $\displaystyle\int_a^b \varphi_x(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\ln(1-x^a) - \ln(1-x^b)}{\ln x}$.
En déduire la limite et un équivalent de f en 1^-.

Exercice 38 **(Centrale PSI 2022)** *[Solution]*

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \left]-1,1\right[,\ u_n(x) = (-1)^n \dfrac{x^n}{1-x^n}$. On pose : $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

1. Montrer que f est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$.
2. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1[,\ v_n(x) = (1-x)u_n(x)$. Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} v_n(x)$ converge uniformément sur $[0,1]$ et en déduire un équivalent de f en 1^-.

Exercice 39 **(Centrale PSI 2019)** *[Solution]*

1. Énoncer le théorème d'intégration par parties sur un intervalle $[a,b[$, $a<b$
2. Trouver une primitive de $t \mapsto e^{-\sqrt{t}}$
3. a) Trouver le domaine de définition et la valeur de $I(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} x^{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$

   b) Trouver le domaine de définition et un équivalent en 1 de $S(x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} x^{\sqrt{n}}$

Exercice 40 **(Mines-Ponts PSI 2017)** *[Solution]*

On note $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, $u_n(t) = \dfrac{t^n \ln(t)}{H_n}$ et $S(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t)$

1. Déterminer le domaine de définition de S et montrer que la série converge normalement sur tout $]0,a] \subset]0,1[$. En est-il de même sur $]0,1[$?
2. Montrer que S est continue sur $]0,1]$. Est-elle dérivable sur ce même intervalle ?

   indication : montrer que $|R_n(t)| \leqslant \dfrac{-t\ln(t)}{(1-t)H_{n+1}}$ *puis montrer qu'elle n'est pas dérivable en* 1 *(avec le taux d'accroissement) en utilisant* $-\ln(1-t) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{t^n}{n}$ *si* $|t|<1$.

Exercice 41 **(Mines-Ponts PSI 2018)** *[Solution]*

On pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \ln(1+e^{-nx})$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D de f.
2. Montrer que f est continue et strictement décroissante sur D.
3. Montrer que f admet une limite finie en $+\infty$ et la déterminer.
4. Déterminer un équivalent de f en 0^+ ; on donne $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$.

   indication : trouver l'équivalent en 0 *en fonction d'une intégrale, poser* $y = e^{-xt}$, *qui se calculera en utilisant la somme donnée et* $\ln(1+t) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} (-1)^{n+1}\frac{t^n}{n}$ *si* $t \in [0,1]$.

Exercice 42 **(Centrale PSI 2019)** *[Solution]*

Pour $x \in [1,+\infty[$, on pose $u_0(x) = x$ et $u_{n+1}(x) = u_n(x) + \dfrac{1}{u_n(x)}$

1. Montrer que $(u_n(x))$ est bien définie. La suite $(u_n(x))$ admet-elle une limite ?
2. On pose $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{u_n(x)}$; montrer que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $[1,+\infty[$.
3. Montrer que $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est continue sur $[1,+\infty[$ mais que $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur $[1,+\infty[$.

Exercice 43 **(CCINP PSI 2022)** *[Solution]*

Soient $I = [-a,a]$ et φ continue sur I pour laquelle il existe $c>0$ tel que $\forall x \in I, |\varphi(x)| \leqslant C|x|$. On chercher les fonctions f, définies sur I, continues en 0 et telles que $\begin{cases} f(x) - f\left(\dfrac{x}{2}\right) = \varphi(x) & \text{pour } x \in I \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1. Montrer que $S : x \mapsto \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \varphi\left(\frac{x}{2^n}\right)$ est définie et continue sur I.
2. Montrer que S est solution du problème posé

3. Montrer que la différence de 2 solutions du problème est nulle ; que peut on en déduire sur l'ensemble des solutions ?

4. On suppose φ de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, montrer que f est aussi $\mathcal{C}^1$ sur I.

Exercice 44 **(Centrale PC 2015)** *[Solution]*
Trouver les fonctions f, continues en 0 telles que $\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) - f(x) = \ln(1 + x^2)$.
indication : justifier que $f(x) - f(0) = \sum_{n \geqslant 0} (f(2^{-n}x) - f(2^{-(n+1)}x)$ *lorsque* f *est continue en* 0.

IV Dérivabilité des séries de fonctions

Exercice 45 **(CCINP PSI 2018)** *[Solution]*

1. Déterminer le domaine de définition de $f(x) = \sum_{n \geqslant 1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right)$

2. Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$.

3. Calculer $f(1)$ et trouver un équivalent de $f(p)$, $p \in \mathbb{N}^*$, lorsque p tend vers $+\infty$.

Exercice 46 **(Mines-Télécom PSI 2024)** *[Solution]*

1. Donner le domaine de définition de $f(x) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{\arctan(nx)}{n^2}$.

2. Étudier la continuité puis le caractère $\mathcal{C}^1$ de f.

Exercice 47 **(CCINP PSI 2022)** *[Solution]*
$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^3 + x^2}$

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 48 **(CCINP PSI 2022)** *[Solution]*
Soient $f(x) = \frac{x}{\operatorname{sh} x}$ et $f_n(x) = \frac{1}{\operatorname{sh}^2 nx}$

1. f est-elle prolongeable par continuité en 0. Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$

2. Montrer que $\sum_{n \geqslant 1} f_n$ CVS sur $\mathbb{R}^*$; on pose $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

3. Montrer que S est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$

4. Exprimer f_n à l'aide de f et en déduire un équivalent simple de S en 0

5. Montrer que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 49 **(Mines-Télécom PSI 2021)** *[Solution]*
Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left[\sqrt{n+x} - \sqrt{n}\right]$ pour $x \geqslant 0$.

1. Montrer que f est bien définie

2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$ et $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$; étudier ses variations.

3. Montrer que $\lim_{+\infty} f = +\infty$.
indication : raisonner par l'absurde et commencer par vérifier que $f(x) \geqslant S_{2n+1}(x)$ *avant de séparer les termes pairs/impairs.*

Exercice 50 **(CCINP PSI 2023)** *[Solution]*
Pour $n \geqslant 1$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $u_n(x) = \frac{\ln(1 + nx^2)}{n^2}$ et $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$

1. Montrer que S est définie sur $\mathbb{R}$

2. Montrer que S est continue sur $\mathbb{R}$

3. Montrer que $\sum u_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}$.

4. Calculer $S(0)$ et $\lim_{+\infty} S$

5. Montrer que S est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

6. Par une comparaison série-intégrale, déterminer un équivalent en 0 de S'

Exercice 51 **(CCINP PSI 2022)** *[Solution]*
Soient $u_n(x) = \dfrac{\ln(1+n^2x^2)}{n^2\ln(1+n)}$ et $S(x) = \sum\limits_{n\geqslant 1} u_n(x)$.

1. Trouver le domaine de définition D de S.

2. Montrer que S est continue sur D.

3. À l'aide d'une comparaison série-intégrale, montrer que $\sum u_n'(x)$ converge uniformément sur D.

4. Montrer que S est $\mathcal{C}^1$ sur D.

Exercice 52 **(Mines-Télécom PSI 2021)** *[Solution]*

1. Déterminer le domaine de convergence de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ avec $u_n(x) = \dfrac{1}{n^2x+n}$.

2. Montrer que sa somme S est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

3. Montrer que, pour $x>0$, on a $\left|S(x) - \sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n^2x}\right| \leqslant \sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n^3x^2}$ et en déduire un équivalent de S en $+\infty$.

Exercice 53 *[Solution]*
On note $f : x \longmapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{e^{-nx}}{1+n^2}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.

2. f est-elle continue sur son ensemble de définition ?

3. Déterminer $\lim\limits_{+\infty} f$.

4. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

5. Montrer que f n'est pas dérivable en 0.

Exercice 54 **(Mines-Ponts PSI 2018)** *[Solution]*

1. Déterminer le domaine de définition de $f(x) = \sum\limits_{n\geqslant 2}\dfrac{xe^{-nx}}{\ln n}$

2. Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$

3. f est-elle dérivable en 0 ? Continue en 0 ?

Exercice 55 **(CCINP PSI 2021)** *[Solution]*
Pour $x \geqslant 0$ et $n \geqslant 1$, on pose $u_n(x) = (-1)^n\dfrac{e^{-nx}}{n}$ et $S(x) = \sum\limits_{n\geqslant 1} u_n(x)$

1. Montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n(x)$ converge pour $x \geqslant 0$.

2. S est-elle continue sur $\mathbb{R}^+$?

3. Montrer que S est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

4. Calculer $S(x)$ pour $x \geqslant 0$.

Exercice 56 **(CCP PSI 2012)** *[Solution]*

1. Montrer que le domaine de définition de $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{e^{-nx}}{n^2}$ est $\mathbb{R}^+$.

2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$ et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

3. Calculer $f''(x)$ puis $f'(x)$ pour $x>0$.

4. Montrer que f est non dérivable en 0.

5. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on a $f(x) = f(0) + \displaystyle\int_0^x \ln\left(1-e^{-t}\right)\,\mathrm{d}t$

Exercice 57 **(Mines-Ponts PSI 2013)** *[Solution]*

1. Donner le domaine de de définition D de $f : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\ln\left(1+x^n\right)$

2. Montrer que f est continue et dérivable sur D.
En déduire un équivalent de f en 0.
3. Montrer que, pour $x \in [0,1[$, $\phi : t \mapsto \ln\left(1+x^t\right)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et en déduire un équivalent de f en 1.

Exercice 58 **(Centrale PSI 2014)** *[Solution]*

1. Déterminer l'ensemble de définition de $f(x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n+n^2x}$.
2. Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
3. Montrer que $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\ln x$ et déterminer un équivalent de f en $+\infty$.

Exercice 59 **(Mines-Ponts PSI 2016)** *[Solution]*

Soit $f(x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{x}{n(1+nx^2)}$

1. Déterminer le domaine de définition de f ; étudier sa continuité et sa dérivabilité.
2. Donner un équivalent de f en $+\infty$.

Exercice 60 **(Mines-Ponts PSI 2024)** *[Solution]*

1. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{x+n}$ converge pour tout $x \in]0,+\infty[$. On note $S(x)$ sa somme.
2. Montrer que $\forall x > 0, \left|S(x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^n}{x+n}\right| \leqslant \frac{1}{x+n}$.
Montrer la convergence uniforme de la série de fonctions sur $]0,+\infty[$.
3. Déterminer la limite de S en $+\infty$.
4. Montrer la convergence uniforme sur tout segment de $\mathbb{R}$ ne contenant aucun élément du type $-n, n \in \mathbb{N}$.
5. Monter que S est dérivable en tout point de $\mathbb{R} \setminus \{-n, n \in \mathbb{N}\}$.

Exercice 61 **(Mines-Ponts PSI 2018)** *[Solution]*

Pour $x > 1$, on pose $\zeta(x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^x}$ et $\eta(x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$

1. Montrer que ζ et η sont définies sur $]1,+\infty[$.
2. Montrer que $\eta(x) = (1-2^{1-x})\zeta(x)$ pour $x > 1$.
3. Montrer que $\zeta(x) \underset{x\to 1}{\sim} \dfrac{1}{x-1}$.
4. Montrer que $\zeta(x) \underset{x\to 1}{=} \dfrac{1}{x-1} + \gamma + o(x-1)$ où $\gamma = \dfrac{\ln 2}{2} + \dfrac{\eta'(1)}{\ln 2}$.
indication : montrer que η est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ puis utiliser Taylor-Young et vérifier que $\eta(1) = \ln(2)$.
5. Montrer que $\gamma = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)\right)$.
indication : il s'agit de trouver une expression de $\eta'(1)$: poser $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k}$, montrer que $\left(u_n - \frac{1}{2}(\ln n)^2\right)$ CV et relier $\eta'(1)$ avec u_n et $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ en séparant les termes pairs et impairs.

Exercice 62 **(ICNA PSI 2017)** *[Solution]*

1. Déterminer l'ensemble de définition de $\zeta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.
2. Etudier la continuité et la dérivabilité de ζ.
3. Montrer que $\displaystyle\int_2^{+\infty} (\zeta(x) - 1)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2 \ln(n)}$.

Exercice 63 **(Mines-Ponts PSI 2018)** *[Solution]*

1. Déterminer le domaine de définition D de $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+nx}$ et montrer que f est continue sur D.
2. Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et donner $f'(x)$ sous forme d'une somme.

3. Calculer $l = \lim_{x \to +\infty} f(x)$ puis déterminer un équivalent de $f(x) - l$ en $+\infty$.

Exercice 64 **(AADN PSI 2009)** *[Solution]*

1. Domaine de définition et limite en 0 de $f(x) = \sum_{n \geqslant 1} (-1)^{n-1} \dfrac{n}{n^2 + x^2}$.

indication : étudier $f(x) - f(0)$.

2. Montrer que f est $\mathcal{C}^\infty$.
indication : décomposer en éléments simples sur $\mathbb{C}$.

Exercice 65 **(Centrale PSI 2009)** *[Solution]*

1. Déterminer l'ensemble de définition D de $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{nx^{2n-1}}{1 - x^{2n}}$.

2. f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur D ? Etudier ses variations.

Exercice 66 **(ENSEA-ENSIIE PC 2014)** *[Solution]*
On pose $u_0 = 1$ et $u_{n+1}(x) = \int_0^x u_n(t - t^2)\,\mathrm{d}t$

1. Montrer que $\forall n \geqslant 1, \forall x \in [0, 1], 0 \leqslant u_n(x) \leqslant \dfrac{x^n}{n!}$

2. Montrer que $\sum u_n$ converge sur $[0, 1]$ vers une fonction u dérivable telle que $u'(x) = u(x - x^2)$.

Exercice 67 **(ENSAM PSI 2014)** *[Solution]*
Soit f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $a > 0$.

1. Montrer que (f_n) définie par $f_0 = f$ et $f_{n+1}(x) = \int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t$ est bien définie.

2. Montrer que f_n est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$, calculer ses dérivées successives et leur valeur en a. En déduire une expression de f_n à l'aide d'une intégrale de f.

3. Montrer l'existence de $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ et donner une expression de g en fonction de f. *(indication : x est fixé)*

4. Montrer que g est solution d'une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants et en donner les solutions.

Exercice 68 **(Mines-Ponts PSI 2023)** *[Solution]*
Soit $f_0 \in \mathcal{C}^1([a, b])$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [a, b]$, $f_{n+1}(x) = \int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

1. On suppose que $\sum f_n$ converge simplement sur $[a, b]$ et que les hypothèses du théorème de dérivation des séries de fonctions sont satisfaites. Calculer $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ en fonction de f_0.

2. Montrer que les hypothèses précédentes sont vérifiées si $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a, b]$

3. Calculer S lorsque $f_0(x) = \sin(2x)$ et $[a, b] = [0, 1]$

V Intégration par convergence uniforme

Exercice 69 *[Solution]*
Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ définie par $u_n = \int_0^1 \dfrac{ne^{-t} + t^2}{n + t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 70 **(Mines-Ponts PSI 2013)** *[Solution]*
On cherche $r = \dfrac{a}{b}$ avec $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $e^r = \dfrac{p}{q}$ avec $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On pose $P_n = \dfrac{1}{n!} X^n (bX - a)^n$.

1. Montrer que $P_n^{(k)}(0)$ et $P_n^{(k)}(r)$ sont des entiers pour $(n, k) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

2. Montrer que $q \int_0^r P_n(t) e^t\,\mathrm{d}t$ est un entier et que $\lim_{n \to +\infty} P_n(t) e^t\,\mathrm{d}t = 0$. Conclure.

Exercice 71 **(ENSIIE PSI 2009)** *[Solution]*

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n définie par $f_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_{n+1}(x) = \int_0^x \sqrt{f_n(t)^2 + t^2}\,\mathrm{d}t$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+, 0 \leqslant f_{n+1}(x) - f_n(x) \leqslant \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$. En déduire que la suite (f_n) admet une limite simple f puis que f est continue sur $\mathbb{R}$.

3. Montrer que f est solution de l'équation différentielle $y' = \sqrt{y^2 + t^2}$ avec $y(0) = 0$.

Exercice 72 **(CCINP PSI 2024)** *[Solution]*

Pour $\alpha > 0$, on pose $f_\alpha(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \sin^\alpha(x) \cos^n(x)$

1. Déterminer le domaine de définition de f_α

2. Trouver une forme simplifiée de f_α sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$

3. Discuter de l'intégrabilité de f_α sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$

4. La série converge-t-elle uniformément sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$?

5. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n(\alpha) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\alpha(x) \cos^n(x)\, \mathrm{d}x$

a) Étudier la convergence de $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} u_n(\alpha)$

b) Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_3(x)\, \mathrm{d}x$.

Exercice 73 **(Mines-Télécom PSI 2019)** *[Solution]*

Soient (α_n) telle que $\sum \alpha_n$ est absolument convergente, $\omega_n \neq 0$ et $u_n(x) = \alpha_n \cos(2\pi\omega_n x)$

1. Montrer que $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ est définie et continue sur $[0, 1]$.

2. Calculer $\displaystyle\int_0^1 f(t)\, \mathrm{d}t$.

3. Justifier que $\displaystyle\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} f\left(\frac{k}{N}\right)$ converge quand N tend vers $+\infty$.

Exercice 74 **(Mines-Ponts PSI 2018)** *[Solution]*

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $y > 0$, on pose $f(x, y) = \displaystyle\int_0^1 t^{xt^y}\, \mathrm{d}t$.

1. Justifier l'existence de $f(x, y)$.

2. On pose $f_n(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{n!}(xt^y \ln t)^n & \text{si } t \in]0, 1] \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$

Montrer que $\sum f_n$ converge normalement sur $[0, 1]$.

3. En déduire $\displaystyle\int_0^1 t^t\, \mathrm{d}t = \sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^n}$.

Exercice 75 **(CCINP PSI 2022)** *[Solution]*

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. On suppose qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\ |\varphi(x)| \leqslant \dfrac{C}{1 + x^2}$. On pose $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \varphi(x) + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} [\varphi(x + n) + \varphi(x - n)]$.

1. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que f est 1-périodique.

3. Soit g une fonction 1-périodique continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que φg est intégrable sur $\mathbb{R}$ et que : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) g(x)\, \mathrm{d}x = \int_0^1 f(x) g(x)\, \mathrm{d}x$.

VI Intégrations par convergence dominée

Exercice 76 *[Solution]*
Déterminer la limite quand n tend vers $+\infty$ de :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos\frac{t}{n}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \quad ; \quad \int_0^{+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n} x^{-\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}x \quad ; \quad \int_0^{n}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n} e^{-2x}\,\mathrm{d}x \quad ; \quad \int_0^{1} x^n \frac{\ln x}{(1-x^2)^{1/4}}\,\mathrm{d}x$$

Exercice 77 (CCP MP 2014) *[Solution]*
Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2+x^ne^{-x}}$.

Exercice 78 (CCP PSI 2010) *[Solution]*
Soit $\alpha\in\mathbb{R}$.

1. Étudier l'intégrabilité sur $\mathbb{R}^{+*}$ de $f : t\mapsto \dfrac{\arctan t}{t^\alpha}$.
2. Existence de $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\arctan t}{t^{3/2}+t^n}\,\mathrm{d}t$ et limite quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 79 (CCINP PSI 2018) *[Solution]*

1. Montrer que $|\sin x|\leqslant |x|$ pour tout $x\in\mathbb{R}$
2. Montrer l'existence de $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t/n)}{t(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$
3. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$ et en trouver un équivalent.

Exercice 80 (CCINP PSI 2021) *[Solution]*
Soit $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(nx)}{1+n^4x^3}\,\mathrm{d}x$, pour $n\geqslant 1$.

1. Justifier l'existence de I_n.
2. Montrer que $I_n = \dfrac{1}{n^{5/3}}J_n$ avec $J_n = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{n^{1/3}\sin\left(\frac{t}{n^{1/3}}\right)}{1+t^3}\,\mathrm{d}t$.
3. Montrer que $\displaystyle\lim_{+\infty} J_n = K = \int_0^{+\infty}\frac{t}{1+t^3}\,\mathrm{d}t$
4. Montrer, par changement de variable que $K = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^3}\,\mathrm{d}t$.
5. En déduire $2K = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1+t}{1+t^3}\,\mathrm{d}t = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$
6. Conclure $I_n \sim \dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}n^{5/3}}$

Exercice 81 (CCINP PSI 2023) *[Solution]*
Soit $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\arctan(x+n)}{\sqrt{x}(n+x)}\,\mathrm{d}x$

1. Justifier l'existence de I_n, pour $n\geqslant 1$
2. Déterminer la limite de $(I_n)_{n\geqslant 1}$
3. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(n+x)}\,\mathrm{d}x$
4. Déterminer un équivalent de I_n.

Exercice 82 (CCINP PSI 2024) *[Solution]*
Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \ln\left(1+t^n\right)\,\mathrm{d}t$

1. Montrer que I_n est bien défini.
2. Montrer la convergence de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et déterminer sa limite.
3. Montrer que $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^1\frac{\ln(1+u)}{u}\,\mathrm{d}u$.
4. En admettant $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, montrer que $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi^2}{12n}$

Exercice 83 **(Mines-Ponts PSI 2019)** *[Solution]*

Pour $n \geqslant 1$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(nt)}{(1+n^4t^2)^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Justifier l'existence de I_n

2. Limite et équivalent de I_n ?

Exercice 84 **(Mines-Ponts PSI 2019)** *[Solution]*

1. Montrer que $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x+x^2}\,\mathrm{d}x$ est définie.

2. Trouver la limite et un équivalent de I_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 85 **(Mines-Ponts PSI 2018)** *[Solution]*

Soit $I_n = \displaystyle\int_0^1 \ln(x)\ln(1-x^n)\,\mathrm{d}x$, pour $n \geqslant 1$.

1. Justifier l'existence de I_n.

2. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.

3. Déterminer un équivalent de I_n

Exercice 86 **(CCP PSI 2018)** *[Solution]*

1. Résoudre l'équation $\mathrm{sh}(x) = 1$.

2. On pose $\alpha = \ln(1+\sqrt{2})$ et $I_n = \displaystyle\int_0^{\alpha} (\mathrm{sh}\, t)^n\,\mathrm{d}t$. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.

3. Montrer que $nI_n + (n-1)I_{n-2} = \sqrt{2}$ pour $n \geqslant 2$.

4. Déterminer un équivalent de I_n.

Exercice 87 **(CCINP PSI 2019)** *[Solution]*

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $I_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{ch}^n\, t}$

1. Montrer que $I_n(x)$ existe pour $n \in \mathbb{N}$

2. Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de (I_n)

3. Trouver une relation entre I_n et I_{n+2}

4. En déduire la valeur de $I = \displaystyle\int_0^{\ln 2} \frac{\mathrm{sh}^2\, t}{\mathrm{ch}^3\, t}\,\mathrm{d}t$

Exercice 88 **(CCP PSI 2013)** *[Solution]*

Pour $n > 0$ et $x > 0$, on pose $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{nx + x^2}$

1. Montrer que les f_n sont prolongeables par continuité en 0 et intégrables sur $[0, +\infty[$.

2. Montrer que la suite de terme général $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 89 **(Mines-Télécom PSI 2024)** *[Solution]*

Soit $f_n(x) = \dfrac{e^{-x}}{1+n^2x^2}$ et $u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0, 1]$.

2. Soit $a \in \,]0, 1[$. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a, 1]$.

3. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $[0, 1]$?

4. Trouver la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 90 **(CCP PSI 2017)** *[Solution]*

On pose $f_n(t) = \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^{n-1} \ln(t)$ si $t \in \,]0, n]$ et $f_n(t) = 0$ si $t > n$.

1. Montrer que (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}^{+*}$ et déterminer sa limite.

2. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \int_0^n f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

3. Sachant que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$, montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t = -\gamma$. On pourra faire le changement de variable $t = nu$ puis une IPP.

Exercice 91 **(CCP PSI 2018)** *[Solution]*

Pour $n \geqslant 1$ et $x \in \mathbb{R}^+$, on pose $f_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^n \sin(x) & \text{si } x \in [0, n] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

1. Étudier la convergence simple de (f_n).
2. Étudier la convergence de $(v_n)_{n \geqslant 1}$, où $v_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$.
3. a) Étudier les variations de $x \mapsto \ln(1+x) - x$.
   b) En déduire que (f_n) converge uniformément.
   indication : montrer que $|f_n(x) - f(x)| \leqslant 1 - e^{n^{1/4} - n\ln(1 - n^{-3/4})}$ *si* $x \in \left[0, n^{1/4}\right]$ *et* $|f_n(x) - f(x)| \leqslant 2e^{-x}$ *si* $x \geqslant n^{1/4}$

Exercice 92 **(Mines-Télécom PSI 2024)** *[Solution]*

Soit $u_n = \displaystyle\int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \cos(x)\,\mathrm{d}x$. Étudier la convergence de la suite (u_n).

Exercice 93 **(CCINP PSI 2024)** *[Solution]*

Soient $f_n(x) = \dfrac{(1 + \frac{x}{n})^n - 1}{x}$ et $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

1. Énoncer le théorème de convergence dominée
2. Montrer que I_n est bien définie.
3. Montrer que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} I_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k \times k!}$
   indication : chercher la limite de I_n sous forme d'une intégrale pour commencer

Exercice 94 **(Centrale PSI 2011)** *[Solution]*

1. Pour quels entiers n, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{\sin t + t^n}\,\mathrm{d}t$ est-elle définie ?
2. Donner la limite I de (I_n) sous forme d'une intégrale.
3. Calculer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} n(I_n - I)$ (on pourra faire un changement de variable).

Exercice 95 **(Centrale PSI 2007)** *[Solution]*

cours : changement de variable.

Application : équivalent en $+\infty$ de $u_n = \displaystyle\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t$ où $f \in \mathcal{C}^0([0,1])$ et $f(1) \neq 0$.

Exercice 96 **(CCP PSI 2013)** *[Solution]*

Déterminer la limite de $n \displaystyle\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t$ où f est continue sur $[0,1]$.

Exercice 97 **(Mines-Ponts MP 2011)** *[Solution]*

Calculer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_0^n \frac{x+1}{x^n e^x + x^2 + x + 1}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 98 **(ENTPE-EIVP PC 2014)** *[Solution]*

Calculer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{x^n}{x^{n+2} + 1}\,\mathrm{d}x$

Exercice 99 **(Mines-Ponts PSI 2013)** *[Solution]*

Étudier la convergence de la suite de terme général $u_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \exp(-x^n)\,\mathrm{d}x$, puis la convergence de la série de terme général u_n.

Exercice 100 **(Centrale PSI 2022)** *[Solution]*

Pour $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos^n x}{x^2}\,\mathrm{d}x$

1. Justifier l'existence de u_n pour $n \geqslant 1$
2. Montrer que $u_n = \dfrac{\sqrt{n}}{2\sqrt{2}} v_n$ avec $v_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos^n\left(\sqrt{\frac{2t}{n}}\right)}{t\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.
3. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que si $t \in [0, \alpha]$ alors $\ln(\cos t) \geqslant -2t^2$

4. Déterminer un équivalent de u_n quand n tend vers $+\infty$; on donne $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$.

Exercice 101 **(ENSEA PSI 2016)** *[Solution]*

1. Énoncer le théorème de convergence dominée.

2. Soient (a_n) et (b_n) deux suites réelles bornées telles qu'il existe $c < d$ pour lesquels $\forall x \in [c,d], (a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx))$ tend vers 0.
Montrer qu'il existe φ_n tel que $a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx) = \sqrt{a_n^2+b_n^2}\cos(nx+\varphi_n)$.

3. Calculer $I_n = \displaystyle\int_c^d (a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx))^2\,\mathrm{d}x$ et montrer qu'à partir d'un certain rang on a $I_n \geqslant \dfrac{(a_n^2+b_n^2)(d-c)}{4}$.

4. Conclure que (a_n) et (b_n) tendent vers 0.

VII Intégration terme à terme

Exercice 102 **(ENSAM PSI 2011)** *[Solution]*

1. Convergence de la série de terme général $(-1)^n a_n$ où $a_n = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,t^n\,\mathrm{d}t$ et calcul de sa somme.

2. Etablir une relation entre a_n et a_{n+2}.

3. Convergence de la série de terme général a_n et calcul de la somme.

Exercice 103 **(Mines-Ponts PSI 2010)** *[Solution]*

Justifier la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{\operatorname{ch} x}\,\mathrm{d}x$ et expression sous forme d'une série.

Exercice 104 **(CCP PSI 2015)** *[Solution]*

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^n}$ et $I = \displaystyle\int_0^1 x^x\,\mathrm{d}x$ existent.

2. Pour $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, on pose $f_{n,p}(t) = t^p(\ln t)^n$. Calculer $\displaystyle\int_0^1 f_{n,p}(t)\,\mathrm{d}t$

3. Montrer que $I = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^n}$.

Exercice 105 **(Mines-Ponts PSI 2021)** *[Solution]*

Soit $x > 0$; on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^1 t^{t^x}\,\mathrm{d}t$. Montrer que $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(xn+1)^{n+1}}$

Exercice 106 **(ENSEA/ENSIIE PSI 2024)** *[Solution]*

On admet que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t$

1. Rappeler le développement en série entière de $t \mapsto \ln(1+t)$ au voisinage de 0.

2. Montrer que $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k(kn+1)}$.

3. Montrer que $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k(k+x)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$.

4. Démontrer que $u_n \sim \dfrac{\pi^2}{12n}$.

5. Montrer que $u_n = a + \dfrac{b}{n} + \dfrac{c}{n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Exercice 107 **(Mines-Ponts PSI 2007)** *[Solution]*

Pour $a > 0$ et $b > 0$, montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{an+b} = \int_0^1 \frac{t^{b-1}}{1+t^a}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 108 **(ENTPE-EIVP PC 2015)** *[Solution]*

Calculer $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n \int_0^1 x^{2n}(1-x)\,\mathrm{d}x$ de deux façons différentes et en déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$.

Exercice 109 **(Centrale PSI 2024)** *[Solution]*

Pour $x \in]0, \pi[$ fixé, on définit $S_x : t \longmapsto \sum_{p=1}^{+\infty} t^{p-1} \sin(px)$

1. Montrer que S_x est définie sur $[0, 1[$ et calculer $S_x(t)$ pour $t \in [0, 1[$.
2. Justifier que S_x est intégrable sur $[0, 1[$ et calculer $\int_0^1 S_x(t)\,\mathrm{d}t$.
3. Justifier la convergence et déterminer la valeur de $\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{\sin(px)}{p}$.

   indication : TCD appliqué aux sommes partielles

Exercice 110 **(CCP PSI 2006)** *[Solution]*

Montrer que $\frac{1}{x^\alpha} \int_0^x \frac{t^{\alpha-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$ existe pour $x \in]0, 1[$ et $\alpha > 0$. En déduire $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{3n}(1+3n)}$

Exercice 111 **(CCINP PSI 2022)** *[Solution]*

Soit $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{e^t - 1}\,\mathrm{d}t$. On donne $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

1. Montrer que I existe
2. Montrer que $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$

Exercice 112 **(CCINP PSI 2018)** *[Solution]*

Montrer que $J = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{e^x - 1}\,\mathrm{d}x$ existe et vaut $\sum_{n \geqslant 1} \frac{2}{n^3}$

Exercice 113 **(CCINP PSI 2022)** *[Solution]*

1. Montrer l'existence de $I = \int_0^{+\infty} \frac{x}{\operatorname{sh} x}\,\mathrm{d}x$
2. Montrer que $I = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(2n+1)^2}$

Exercice 114 **(Mines-Télécom PSI 2024)** *[Solution]*

Soit $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t$

1. Déterminer le domaine de définition de Γ
2. Donner le développement en série entière de $\frac{1}{1-x}$
3. Montrer que $\forall x > 0, \int_0^{+\infty} \frac{t^x e^{-t}}{1 - e^{-t}}\,\mathrm{d}t = \Gamma(x+1) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{x+1}}$

Exercice 115 **(CCINP PSI 2023)** *[Solution]*

Soit $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\operatorname{sh} t}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que I converge.
2. Montrer que $\forall t \in]0, +\infty[\,, \frac{\sin t}{\operatorname{sh} t} = 2e^{-t} \sin t \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-2nt}$.
3. Montrer que $I = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(2n+1)^2 + 1}$.

   indication : utiliser $|\sin(t)| \leqslant t$ *pour appliquer le TITT*
4. Montrer que : $\frac{\pi}{4} \leqslant I \leqslant 1 + \frac{\pi}{4}$.

   indication : comparaison série/intégrale

Exercice 116 **(Mines-Télécom PSI 2024)** *[Solution]*

Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{e^t - 1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2}$ en montrant la convergence de la série et de l'intégrale.

indication : $|\sin| \leqslant t$

Exercice 117 **(Mines-Ponts PSI 2018)** *[Solution]*

1. Montrer l'existence de $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-t^2)\ln(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

2. Montrer que $I = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(2n-1)^2}$ et en déduire la valeur de I à l'aide de constantes usuelles.

indication : $-\ln(1-u) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u^n}{n}$ *si* $|u| < 1$

Exercice 118 **(Centrale PSI 2019)** *[Solution]*

1. Soient $(u_n) \in \left(\mathbb{R}^{+*}\right)^{\mathbb{N}}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{\alpha}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. On pose $b_n = \ln(n^\alpha u_n)$ et $a_n = b_{n+1} - b_n$.

Montrer que $\sum a_n$ converge et en déduire qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $u_n \sim \dfrac{\lambda}{n^\alpha}$.

2. Pour $x \in]-1, 0[$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1-(1-t)^x}{t}\,\mathrm{d}t$.

a) Justifier que f est bien définie.

b) À l'aide de **1**, montrer que $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} x(x-1)\dots(x-n+1)}{n \times n!}$

indication : $(1-t)^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!} t^n$ *si* $|t| < 1$

Exercice 119 **(ENSAM PSI 2015)** *[Solution]*

1. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, justifier l'existence de $I(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{e^x - 1}\,\mathrm{d}x$.

2. Montrer que $I(\alpha) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{a}{b+n^2}$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

3. En déduire un équivalent de $I(\alpha)$ quand α tend vers $+\infty$.

Exercice 120 **(Mines-Télécom PSI 2024)** *[Solution]*

Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nt}}{\sqrt{n}}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$.

Exercice 121 **(CCINP PSI 2018)** *[Solution]*

Soit (a_n) une suite complexe telle que $\sum |a_n|$ converge.

1. Montrer que $f(x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n \frac{x^n}{n!} e^{-x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.

2. Montrer que f est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 122 **(CCINP PSI 2019)** *[Solution]*

1. Montrer que $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{1+e^t}\,\mathrm{d}t$ existe.

2. Montrer que $I = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{1+n^2}$

Exercice 123 **(Mines-Ponts PSI 20121)** *[Solution]*

1. Étudier la convergence et la convergence absolue de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n \frac{2n+1}{(2n+1)^2 + x^2}$

2. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{(2n+1)^2 + x^2} = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+e^{-2t}} \cos(xt)\,\mathrm{d}t$

Exercice 124 **(ENSEA PSI 2018)** *[Solution]*

Nature et somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ avec $u_n = (-1)^n \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 125 **(Mines-Ponts PSI 2018)** *[Solution]*

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{(\ln t)^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \frac{(\ln t)^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$

2. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(\ln t)^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = 4\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$

Exercice 126 **(CCINP PSI 2024)** *[Solution]*

On pose $\displaystyle I = \int_0^1 \frac{t(\ln t)^2}{(1-t)^2}\,\mathrm{d}t$

1. Justifier l'existence de I

2. Montrer que $\displaystyle I = 2\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}\right)$

Exercice 127 **(Mines-Ponts PSI 2015)** *[Solution]*

1. Déterminer le domaine de convergence de $\displaystyle f(x) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^2+x^2}$.

2. Montrer que f est intégrable sur $\mathbb{R}$ et calculer cette intégrale.
indication : pour le calcul de l'intégrale, on a calculé la somme de la série dans le chapitre sur les séries.

Exercice 128 **(AADN PSI 2012)** *[Solution]*

1. Montrer que la série de fonctions définies sur $[0,1]$ par $f_n(t) = t^n\sin(\pi t)$ converge simplement et déterminer la somme de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n$ notée F. Y a-t-il convergence uniforme ?

2. Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 129 **(CCP PSI 2018)** *[Solution]*

Soit $\displaystyle u_n = \int_0^1 x^n\sin(\pi x)\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que $\sum u_n$ converge.
indication : montrer que $u_n = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ *soit par IPP, soit en vérifiant que* $\sin(\pi x) \leqslant \pi(1-x)$

2. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 130 **(TPE-EIVP PSI 2018)** *[Solution]*

Existence et valeur de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{t-1}\,\mathrm{d}t$ sachant que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 131 **(Mines-Ponts PSI 2022)** *[Solution]*

Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}^+)$. On pose $\displaystyle u_n = \int_0^1 f(t)t^n\,\mathrm{d}t$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ et $\displaystyle I = \int_0^1 \frac{f(t)}{1-t}\,\mathrm{d}t$.

Montrer que I et $\sum u_n$ sont de même nature . Lien entre les deux en cas de convergence ?

Solutions

Exercice 1 *[sujet]* **1.** (f_n) CS vers 0 sur $\mathbb{R}$, uniformément sur $[-a,a]$ car $\|f_n\|_{\infty,[-a,a]} = f_n(a) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ mais pas sur $\mathbb{R}^+$ car $f_n(n) = \dfrac{\pi}{4}$.

2. Si $a>1$, (f_n) CS sur I vers $f : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x>0 \\ -1 & \text{si } x=0 \end{cases}$ donc pas de CU sur I (f_n est continue et pas f) ; par contre $\|f_n - 1\|_{\infty,[\alpha,0]} = \dfrac{2}{1+n^a \sin\frac{\alpha}{n}}$ donc CU sur $[\alpha, \pi/2]$ si $\alpha > 0$.
Si $a=1$ alors (f_n) CS vers $f : x \mapsto \dfrac{x-1}{x+1}$ puis $\left|f_n(x) - \dfrac{x-1}{x+1}\right| \leqslant x - n\sin\dfrac{x}{n} \leqslant \dfrac{\pi}{2} - n\sin\dfrac{\pi}{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc CU sur I.
Si $a<1$ alors (f_n) CS vers -1 et $|f_n(x)+1| \leqslant 2n^a\sin(x/n) \leqslant 2n^a \sin\dfrac{\pi}{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc CU sur I.

Exercice 2 *[sujet]* (f_n) CS vers 0 ; si $x \geqslant a$ alors $|f_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{1+n^2a^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc CU sur $[a,+\infty[$ et $(f_n(1/n))$ ne tend pas vers 0 donc pas CU sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 3 *[sujet]* Si $x>0$ alors $f_n(x) = \dfrac{2n^2x^2+nx+1}{2n^2x+1}\sin^2\dfrac{\pi}{x}$ à partir d'un certain rang donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = x\sin^2\dfrac{\pi}{x}$ et $f_n(0)=0$. Si $x \in \left[0, \dfrac{1}{n}\right[$, $|f_n(x) - f(x)| = x\sin^2\dfrac{\pi}{x} \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{n}$ et si $x \in \left[\dfrac{1}{n}, 1\right]$, $|f_n(x)-f(x)| = \dfrac{|(n+1)x+1|}{2n^2x+1}\sin^2\dfrac{\pi}{x} \leqslant \dfrac{(n+1)x+1}{2n^2x+1} \overset{\text{etude fct}}{\leqslant} \dfrac{1}{n}$ donc $\|f_n - f\|_\infty \leqslant \dfrac{1}{n}$ donc CVU sur $[0,1]$

Exercice 4 *[sujet]* **1.** (f_n) CS vers cos sur $\mathbb{R}$

2. si $x\in[-a,a]$ alors $|f_n(x) - \cos(x)| = 2\left|\sin\dfrac{x}{n}\sin\left(2+\dfrac{1}{n}\right)x\right| \leqslant \dfrac{2a}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc CU sur $[-a,a]$; par contre $|f(n\pi) - \cos(n\pi)| = 2$ donc pas de CU sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5 *[sujet]* **1.** (f_n) CVS vers 0 sur $[0,1]$

2. si $x\in[a,1]$, $|f_n(x)| \leqslant nxe^{-nx^2} \leqslant ne^{-na^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc CVUTS de $]0,1]$ alors que $f_n\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) = \sin\left(\dfrac{\sqrt{n}}{e}\right)$ ne tend pas vers 0 donc pas de CVU sur $[0,1]$

Exercice 6 *[sujet]* **1.** $f(x) = x$ puis, pour $x \geqslant 0$, $|f_n(x) - x| = \dfrac{x}{1+nx} \leqslant \dfrac{1}{n}$ alors que si $x<0$, $|f_n(x)-x| = \dfrac{-x}{1+nx^2} \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$ (étude de fct) donc CVU sur $\mathbb{R}$.

2. si $x>0$, $f_n'(x) = \dfrac{nx(2x+nx)}{(1+nx)^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, $f_n'(0) = 0$ et pour $x<0$, $f_n'(x) = \dfrac{nx^2(3+nx^2)}{(1+nx^2)^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$; pas de CVU sur $[-1,1]$ car les f_n' sont continues en 0 et pas la limite simple de f_n'

Exercice 7 *[sujet]* **1.** $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x>0 \\ 1 & \text{si } x=0 \end{cases}$

2. $|f_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{1+n^2a^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc CVUTS de $]0,1]$

3. f n'est plus continue en 0

4. $\lim u_n = 0$ par TCD avec $|f_n(x)| \leqslant 1$

5. $u_n \geqslant e^{-1}\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+n^2x^2} = \frac{e^{-1}}{n}\arctan(n) \sim \frac{e^{-1}}{n}\frac{\pi}{2}$ donc (SATP) $\sum u_n$ DVG

Exercice 8 *[sujet]* **1.** $|g_n'(t)| = \dfrac{t}{n}e^t\left(1-\dfrac{t}{n}\right)^{n-1} \leqslant \dfrac{e^t}{t}$ puis par IAF, $|g(t)-g(0)| \leqslant \dfrac{te^t}{n}$

2. On a $\left|I_n(x) - \displaystyle\int_0^x 1\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \displaystyle\int_0^x \left|e^t\left(1-\frac{t}{n}\right)^n - 1\right|\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n}\int_0^x te^t\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n}\int_0^1 te^t\,\mathrm{d}t$ donc (f_n) CU sur $[0,1]$ vers $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \mathrm{d}t = x$.

Exercice 9 *[sujet]* Si $(f_n(x))$ converge vers $f(x)$ alors $f(x) = \sqrt{x}$ (car $f_n(x) \geqslant 0$) puis $|f_{n+1}(x) - \sqrt{x}| = |f_n(x) - \sqrt{x}|\left(1 - \dfrac{1}{2}(\sqrt{x} + f_n(x))\right) \leqslant \left(1-\dfrac{\sqrt{x}}{2}\right)|f_n(x)-\sqrt{x}|$ ce qui donne par récurrence $|f_n(x) - \sqrt{x}| \leqslant \sqrt{x}\left(1-\dfrac{\sqrt{x}}{2}\right)^n = g_n(\sqrt{x})$; on étudie $g_n(t) = t\left(1-\dfrac{t}{2}\right)^n$ pour trouver $\|g_n\|_\infty = g_n\left(\dfrac{2}{n+1}\right) \leqslant \dfrac{2}{n+1}$ donc $\|f_n - \sqrt{\ }\|_\infty \leqslant \|g_n\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc (f_n) CU sur $[0,1]$ vers la fonction racine carrée.

Exercice 10 *[sujet]* **1.** on vérifie $g'(y) = 1 - xy \in [0,1]$ donc (IAF) g est 1-lip et $[0,1]$ est stable (variations)

2. a) $h_0 \in [0,1]$ et $h_{n+1}(x) = g\left(h_n\left(\frac{x}{2}\right)\right)$, d'où le résultat par récurrence

b) $|h_{n+1}(x) - h_n(x)| = \left|g\left(h_n\left(\frac{x}{2}\right)\right) - g\left(h_{n-1}\left(\frac{x}{2}\right)\right)\right| \overset{1-\text{lip}}{\leqslant} \left|h_n\left(\frac{x}{2}\right) - h_{n-1}\left(\frac{x}{2}\right)\right|$

c) On en déduit $|h_{n+1}(x) - h_n(x)| \leqslant \left|h_1\left(\frac{x}{2^n}\right) - h_0\left(\frac{x}{2^n}\right)\right| = \frac{x}{2^{n+1}} \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}$ donc $\sum(h_{n+1}(x) - h_n(x))$ est ACV et (h_n) CVS vers f sur $[0,1]$. Puis $|f(x) - h_n(x)| = \left|\sum_{k=n}^{+\infty} h_{k+1}(x) - h_k(x)\right| \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^n}$ donc $\|f - h_n\|_\infty \leqslant \frac{1}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc (h_n) CVU vers f sur $[0,1]$

3. par récurrence, on vérifie que h_n est continue sur $[0,1]$ donc f aussi par CVU ; $h_n(0) = 1$ donc $f(0) = 1$ et par passage à la limite dans la relation qui définit $h_n(x)$, on trouve l'équation fonctionnelle de f

Exercice 11 *[sujet]* **1.** $|e^{-t}e^{it}| = e^{-t}$ est intégrable sur $[x, +\infty[$ puis on trouve $\varphi(x) = \frac{1}{2}(\cos(x) - \sin(x))$ et $\psi(x) = \frac{1}{2}(\cos(x) + \sin(x))$

2. $\varphi(x) = -e^x \int_0^x e^{-t}\cos(t)\,dt + e^x\varphi(0)$ donc φ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\varphi'(x) = \varphi(x) - \cos(x)$. Les solutions sont $y(x) = \alpha e^x + \varphi(x)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. On a ensuite $|\varphi(x)| \leqslant e^x \int_x^{+\infty} e^{-t}\,dt = 1$ donc φ est bornée et y est bornée sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\alpha = 0$

3. Si $f_n = \alpha_n \cos + \beta_n \sin$ alors $f_{n+1} = \frac{\alpha_n + \beta_n}{2}\cos + \frac{\beta_n - \alpha_n}{2}\sin$; on a donc $\begin{pmatrix}\alpha_{n+1}\\ \beta_{n+1}\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_n\\ \beta_n\end{pmatrix}$ puis $\begin{pmatrix}\alpha_n\\ \beta_n\end{pmatrix} = \frac{1}{2^n}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}^n\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$; on vérifie ensuite $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}^n = 0$ (calculer la puissance) donc $(\alpha_n, \beta_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} (0,0)$ et $\|f_n\|_\infty \leqslant |\alpha_n| + |\beta_n|$ et (f_n) CVU vers 0 sur $\mathbb{R}$

Exercice 12 *[sujet]* **1.** cours

2. $S_{n,0}$ facile ; si $k \geqslant 1$, $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ donc $S_{n,1}(x) = n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}x^k(1-x)^{n-k} - nxS_{n,0}(x) \overset{j=k-1}{=} nx(x+1-x)^{n-1} - nx = 0$

3. on a $\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) - \left(\frac{k}{n} - x\right)f'(x)\right| \leqslant \frac{M}{2}\left(\frac{k}{n} - x\right)^2$ avec $M = \max_{[0,1]}|f''|$ (th des bornes atteintes) ; en sommant et avec l'inég triangulaire, on obtient $\left|B_n(f) - S_{n,0}(x)f(x) - \frac{1}{n}S_{n,1}(x)f'(x)\right| \leqslant \frac{M}{2n^2}S_{n,2}(x)$ qui donne le résultat. $x(1-x) \leqslant \frac{1}{4}$ donc $\|B_n(f) - f\|_\infty \leqslant \frac{M}{8n}$ donc $(B_n(f))$ CVU sur $[0,1]$ vers f.

Exercice 13 *[sujet]* **1.** On a $u_n(x) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ pour $x \in [0,1]$ fixé donc $\sum u_n$ CS sur $[0,1]$. De plus $\|u_n\|_\infty = u_n\left(\frac{a}{a+nb}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{a}{b}\right)^a e^{-a}\frac{1}{n^{a-c}}$ donc CN sur $[0,1]$ si et seulement si $a - c > 1$.

2. $u_n(x) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc CS sur $\mathbb{R}^{+*}$. Puis $u_n'(x) = n(\alpha - 2nx^2)x^{\alpha-1}e^{-nx^2}$ on discute sur le signe de α :

- Si $\alpha < 0$ alors u_n n'est pas bornée sur $\mathbb{R}^{+*}$ donc la CN n'a même pas de sens.
- Si $\alpha = 0$ alors $\|u_n\|_\infty = \lim_{x\to0} u_n(x) = n$ donc pas de CN.
- Si $\alpha > 0$ alors $\|u_n\|_\infty = u_n\left(\sqrt{\frac{\alpha}{2n}}\right) = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{\alpha/2} \times \frac{1}{n^{\alpha/2-1}}$ donc CN si et seulement si $\alpha/2 - 1 > 1$

Exercice 14 *[sujet]* **1.** (f_n) CVS vers 0 sur $[0,1]$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$; $\|f_n\|_\infty = f_n\left(\frac{1}{n+1}\right) \sim \frac{n^{\alpha-1}}{e}$ donc (f_n) CVU sur $[0,1]$ si et seulement si $\alpha < 1$

2. $f_n(x) = \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $\sum f_n$ CVS sur $[0,1]$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$; d'après la première question, $\sum f_n$ CVN sur $[0,1]$ si et seulement si $\alpha < 0$. Si $\alpha \geqslant 0$ alors $R_n\left(\frac{1}{n}\right) \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} k^\alpha\frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^k \geqslant n \times (n+1)^\alpha\frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2n} \sim \frac{n^\alpha}{e^2}$ qui ne tend pas vers 0 donc pas de CVU sur $[0,1]$

Exercice 15 *[sujet]* **1.** (f_n) CVS sur $\mathbb{R}$ vers 0 ; $\|f_n\|_\infty = f_n\left(\dfrac{4}{n}\right) = \dfrac{4e^{-4}}{n}$ donc CVU sur $\mathbb{R}$.

2. $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ si $x \neq 0$ et $f_n(0) = 0$ donc ACV sur $\mathbb{R}$; pas de CVN sur $\mathbb{R}$ avec la première question mais CVN sur $E = \mathbb{R}\setminus]-a, a[$ car $\|f_n\|_{\infty,E} = f_n(a)$ pour n grand et la CVS en a donne la CVN sur E.

Exercice 16 *[sujet]* **1.** $g_n'(x) = \cos^n x[(n+1)\cos(x) - n]$ donc $\|g_n\|_\infty = g_n\left(\arccos \dfrac{n}{n+1}\right) = \sqrt{1 - \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^2}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$

2. $\|f_n\|_\infty \leqslant \dfrac{\pi}{2}\|g_n\|_\infty \leqslant \dfrac{\pi}{2}\sqrt{1 - \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc (f_n) CVU sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ vers 0.

$\sum f_n$ CVS sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$; $S(x) = \dfrac{x\sin(x)}{1-\cos(x)}$ si $x \neq 0$ donc $\lim\limits_{x\to 0} S(x) = 2$ alors que $S(0) = 0$ donc pas de CVU sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Il y a par contre CVN sur tout segment de $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ car $\|f_n\|_{\infty,[a,b]} \leqslant b\cos^n(a)$ (car cos décroit sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$) et $|\cos(a)| < 1$.

Exercice 17 *[sujet]* **1.** si $|\cos(x)| < 1$ alors $\sum u_n(x)$ CV et $u_n(0) = 0$ donc $\sum u_n(0)$ CV aussi. Puis $f(x) = \sum\limits_{n\geqslant 0} u_n(x) = \dfrac{\sin^\alpha x}{1-\cos(x)}$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$.

2. $\|u_n\|_\infty = u_n\left(\arctan\sqrt{\dfrac{\alpha}{n}}\right) = \left(\dfrac{\sqrt{\alpha/n}}{1+\alpha/n}\right)^\alpha\left(\dfrac{1}{1+\alpha/n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\sim} \alpha^{\alpha/2}e^{-\alpha}\dfrac{1}{n^{\alpha/2}}$ donc CN sur $[0, \pi/2]$ si et seulement si $\alpha > 2$.
Si $\alpha \leqslant 2$ alors $\dfrac{\sin^\alpha x}{1-\cos(x)} \underset{x\to 0}{\sim} 2x^{\alpha-2}$ donc f n'est pas continue en 0 ; comme les u_n sont continue en 0, la convergence n'est pas uniforme non plus.

Exercice 18 *[sujet]* **1.** (f_n) CS vers 0 sur $\mathbb{R}^+$ et $\|f_n\|_\infty = f_n(n) = \left(\dfrac{n}{e}\right)^n\dfrac{1}{n!} \sim \dfrac{1}{\sqrt{2\pi n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc (f_n) CVU vers 0 sur $\mathbb{R}^+$.

2. $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers 1 et la convergence ne peut pas être uniforme sur $\mathbb{R}^+$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \neq \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$.
On a par contre CN sur tout segment puisque $\|f_n\|_{\infty,[0,a]} \leqslant \dfrac{a^n}{n!}$

Exercice 19 *[sujet]* **1.** Étudier 2 fonctions

2. On vérifie $\dfrac{x}{1+x^2} \leqslant \dfrac{1}{2}$ donc $1 + \dfrac{(-1)^n x}{n(1+x^2)} > 0$ puis $\ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n x}{n(1+x^2)}\right) = \dfrac{(-1)^n x}{n(1+x^2)} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ donc la série CVS sur $\mathbb{R}$.
On a $\left|f_n(t) - \dfrac{(-1)^n x}{n(1+x^2)}\right| \leqslant 2\dfrac{x^2}{n^2(1+x^2)^2}$ car $\left|\dfrac{x}{n(1+x^2)}\right| \leqslant \dfrac{1}{2n} \leqslant \dfrac{1}{2}$. On en déduit $\left\|f_n(t) - \dfrac{(-1)^n x}{n(1+x^2)}\right\|_\infty \leqslant 2\dfrac{1}{4n^2} = \dfrac{1}{2n^2}$; de plus $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{(-1)^n x}{n(1+x^2)} = \dfrac{x}{1+x^2}\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{(-1)^n}{n}$ CVU sur $\mathbb{R}$ (la somme est une constante). Comme $\sum\limits_{k=1}^{n} f_k(t) = \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{(-1)^k x}{k(1+x^2)} + \sum\limits_{k=1}^{n}\left(f_k(t) - \dfrac{(-1)^k x}{k(1+x^2)}\right)$, somme d'une série CVU et d'une série CVN sur $\mathbb{R}$, on en déduit $\sum f_k$ CVU sur $\mathbb{R}$.

Exercice 20 *[sujet]* **1.** $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n^{\ln x}}$ donc $\sum f_n$ CS sur $]1, +\infty[$

2. La convergence absolue n'étant vérifiée que sur $]e^2, +\infty[$, il ne peut pas y avoir CN sur $]1, +\infty[$.

3. Par CSSA, on a $|R_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{(n+1)^{\ln x}} \leqslant \dfrac{1}{(n+1)^{\ln a}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc CU sur $[a, +\infty[$ si $a > 1$; comme les f_n sont continues sur $]1, +\infty[$, on en déduit que la somme est aussi continue sur $]1, +\infty[$.

4. $\left|f_n\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)\right| = \exp\left[-\ln(n)\left(\dfrac{1}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc $\|f_n\|_\infty \geqslant 1$. Si on avait CU sur $]1, +\infty[$, on aurait $\|f_n\|_\infty = \|R_{n-1} - R_n\|_\infty \leqslant \|R_{n-1}\|_\infty + \|R_n\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, ce qui n'est pas le cas.

Exercice 21 *[sujet]* **1.** $f_n(x) = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+x} = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$

2. $\|f_n\|_{\infty,[a,b]} = f_n(b)$ donc CN sur tout segment

3. $S(x+1) - S(x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{n+x} - \frac{1}{n+x+1}\right) = \frac{1}{1+x}$ par télescopage ; on a $S(x) = -\dfrac{1}{1+x} + S(x+1) \overset{-1}{=} -\dfrac{1}{1+x} + S(0) + o(1)$ par continuité de S en 0.

4. $\|f_n\|_\infty = \dfrac{1}{n}$ donc non

Exercice 22 *[sujet]* **1.** $D = \mathbb{R}^+$.

2. CVNTS avec $|f_n(x)| \leqslant \dfrac{b}{n^{1+a}}$ et $1 + a > 0$.

3. $f(x) \geqslant f_1(x) + \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x}{t^{1+x}}\,\mathrm{d}t = x + 1$ donc f ne tend pas vers $f(0) = 0$ en 0

4. $\lim\limits_{+\infty} f - id = 0$ par double limite avec CVN sur $[1, +\infty[$ car f_n décroît sur $\left[\dfrac{1}{\ln(n)}, +\infty\right[$.

Exercice 23 *[sujet]* **1.** Si $x > 1$ alors $u_n(x) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\left(\dfrac{1}{x}\right)^n\right)$ donc $\sum u_n(x)$ CV, $u_n(1) = 0$ et si $x < 1$, $\sum u_n(x)$ DVG. Ainsi, $D_f = [1, +\infty[$.

2. On a $\|u_n\|_\infty = \dfrac{1}{n\ln(n)}$ et $\sum \dfrac{1}{n\ln(n)}$ DV (Bertrand)

3. Si $x > 1$, $|R_n(x)| \leqslant \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^k \ln(n+1)} = \frac{1}{\ln(n+1)}\frac{\ln(x)/x^{n+1}}{1 - 1/x} \leqslant \frac{1}{\ln(n+1)}\frac{\ln(x)}{x-1} \leqslant \frac{1}{\ln(n+1)}$ car on vérifie que $\ln(x) \leqslant x - 1$. L'inégalité finale reste aussi valable si $x = 1$ donc $\|R_n\|_\infty \leqslant \dfrac{1}{\ln(n+1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc la série CU sur $[1, +\infty[$ et comme les u_n sont continues sur ce domaine, on en déduit que la somme de cette série est elle aussi continue sur $[1, +\infty[$.

Exercice 24 *[sujet]* **1.** si $x > 0$, $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, $f_n(0) = 0$ et $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$ si $x < 0$ donc $D_S = \mathbb{R}^+$

2. si $x \in [a, b] \subset \mathbb{R}^{+*}$ alors $|f_n(x)| \leqslant \dfrac{be^{-na}}{\ln n} = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ donc CVNTS de $\mathbb{R}^{+*}$

3. $|R_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{\ln(n+1)} \displaystyle\sum_{k\geqslant n+1} xe^{-kx} = \frac{1}{\ln(n+1)} \times \frac{xe^{-(n+1)x}}{1 - e^{-x}} \leqslant \frac{1}{\ln(n+1)}\frac{xe^{-x}}{1 - e^{-x}} \leqslant \frac{C}{\ln(n+1)}$ car $x \mapsto \dfrac{xe^{-x}}{1 - e^{-x}}$ est bornée sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Exercice 25 *[sujet]* **1.** On a $u_n(x) \underset{n\to\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ donc CS sur $\mathbb{R}^{+*}$; $R_n(1/n) \geqslant \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{e^{-k/n}}{k+1} \geqslant e^{-2} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k+1} \geqslant e^{-2}\frac{n}{2n+1}$ ne tend pas vers 0 donc $\|R_n\|_\infty$ non plus.

2. On a $\|u_n\|_{\infty,[a,b]} \leqslant u_n(a)$ donc CN sur tout segment de $\mathbb{R}^{+*}$ puis f est continue. De même $\|u_n'(x)\|_{\infty,[a,b]} \leqslant \dfrac{ne^{-na}}{1+n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ donc $\sum u_n'$ CN sur tout segment de $\mathbb{R}^{+*}$ d'où la classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

3. En $+\infty$: $\|u_n\|_{\infty,[1,+\infty[} = u_n(1)$ donc CN sur $[1, +\infty[$, le théorème de double limite s'applique et $\lim\limits_{+\infty} f = 1$.

En 0 : f est décroissante donc admet une limite $l \in \mathbb{R}^+ \cap \{+\infty\}$; si $l \neq +\infty$ alors $l \geqslant f(x) \geqslant \displaystyle\sum_{n=0}^{N} u_n(x)$ pour tout $N \in \mathbb{N}$; en faisant tendre x vers 0 dans l'inégalité (somme finie), on aurait $l \geqslant \displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n+1}$ ce qui est absurde puisque cette somme partielle de SATP DV vers $+\infty$. On a donc $l = +\infty$.

Exercice 26 *[sujet]* **1.** On a $\|f_n\|_{\infty,[a,b]} \leqslant b^{2-\alpha}e^{-na} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ donc CN sur tout segment de $\mathbb{R}^{+*}$ et la f est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.

2. $\|f_n\|_\infty = u_n\left(\dfrac{2-\alpha}{n}\right) = (2-\alpha)^{2-\alpha}e^{\alpha-2}\dfrac{1}{n^{2-\alpha}}$ donc CN sur $\mathbb{R}^{+*}$ si et seulement si $\alpha < 1$.

3. Si $\alpha = 1$ alors $f(x) = \dfrac{xe^{-x}}{1 - e^{-x}}$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$ et comme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x\to 0} f_n(x) = 0$, le théorème de double limite assure qu'il n'y a pas CU sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Exercice 27 *[sujet]* **1.** Comme $\ln\left(1-\frac{k}{t}\right) \leqslant -\frac{k}{t}$ (si $k<t$) donc $\|u_k\|_\infty \leqslant e^{-k}$ donc CN sur $[1,+\infty[$.

2. $\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^n = \sum_{p=1}^{n-1}\left(1-\frac{p}{n}\right)^n = \sum_{p=1}^{n-1} u_p(n) = f(n)$; on calcule alors la limite de f en $+\infty$ par le théorème de double limite : $\lim_{t\to+\infty} u_k(t) = e^{-k}$ donc $\lim_{+\infty} f = \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-k} = \frac{1}{e-1}$.

Exercice 28 *[sujet]* **1.** Si $x>0$, $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2e^{-nx}$ donc CS sur $\mathbb{R}^*$ par imparité

2. $e^x f(x) = \sum_{n\geqslant 1} g_n(x)$ avec $|g_n(x)| \leqslant \frac{2}{e^{n-1}-1}$ si $x \geqslant 1$ donc $\sum g_n$ CN sur $[1,+\infty[$ et le théorème de double limite permet de conclure

3. $f_n(x)^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} 4e^{-2nx}$ donc CS sur $\mathbb{R}^*$ aussi. On trouve de même $\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)^2 \underset{x\to+\infty}{\sim} 4e^{-2x}$

Exercice 29 *[sujet]* **1.** $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2e^{-n|x|}$ donc $D_f = \mathbb{R}^*$

2. $|f_n(x)| \leqslant f_n(a)$ si $x \in [a,b] \subset \mathbb{R}^{+*}$ donc CVNTS de $\mathbb{R}^{+*}$ et f est continue sur $\mathbb{R}^*$ (par imparité)

3. f_n décroît sur $\mathbb{R}^{+*}$ donc f aussi (et imparité)

4. $\lim_{u\to+\infty} e^{-u/2}\operatorname{sh}(u) = +\infty$

5. pour $x \geqslant 1$ et $n \geqslant n_0 \geqslant u_0$ (celui de la question précédente, n_0 est indép de x) et on choisit $n_0 \geqslant 3$, on a $nx \geqslant u_0$ donc $f_n(x) \leqslant e^{-nx/2}$. On en déduit $0 \leqslant f(x) - \frac{1}{\operatorname{sh} x} \leqslant \sum_{k=2}^{n_0-1} f_k(x) + \sum_{k=n_0}^{+\infty} e^{-kx/2} = \sum_{k=2}^{n_0-1} f_k(x) + \frac{e^{-n_0x/2}}{1-e^{-x/2}} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(e^{-x}\right)$ (la somme restante est finie) ; comme $\frac{1}{\operatorname{sh} x} \underset{x\to+\infty}{\sim} 2e^{-x}$

Exercice 30 *[sujet]* **1.** Si $|a|<1$ alors $\frac{a^n}{x+n} \underset{n\to+\infty}{=} o(a^n)$ donc CS sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}^-$, idem pour $a=-1$ par CSSA ; pour $a=1$ ou $|a|>1$ la série DV

2. $|u_n(x)| \leqslant a^n$ si $n \geqslant 1$ donc $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ CN sur $\mathbb{R}^{+*}$

3. $aS(x+1) = S(x) - \frac{1}{x}$ donc $S(x) = aS(x+1) + \frac{1}{x} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x}$ car $S(x+1) \xrightarrow[x\to 0]{} S(1)$ par continuité (donc $o\left(\frac{1}{x}\right)$)

4. $xS(x) - \frac{1}{1-a} = \sum_{n\geqslant 0} a^n\left(\frac{x}{x+n} - 1\right) = -\sum_{n\geqslant 0} \frac{a^n}{1+x/n}$ puis $\left|\frac{a^n}{1+x/n}\right| \leqslant a^n$ donc la série CN sur $[1,+\infty[$ et le théorème de double limite donne la réponse.

Exercice 31 *[sujet]* **1.** si $x>0$, $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc CS sur $\mathbb{R}^{+*}$ et DVG si $x \leqslant 0$.

2. si $x \geqslant a$ alors $|f_n(x)| \leqslant f_n(a)$ donc CN sur $[a,+\infty[$ mais $\|f_n\|_\infty = 1$ donc pas sur $\mathbb{R}^{+*}$.

3. f est continue par CN sur tout segment et $\lim_{+\infty} f = 0$ par CN sur $[1,+\infty[$ et théorème de double limite.

4. Comparaison série intégrale et changement de variable $u = x\sqrt{t}$ dans $\int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 32 *[sujet]* **1.** si $x>0$, $f_n(x) = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et DVG si $x \leqslant 0$

2. $|f_n(x)| \leqslant f_n(a)$ si $x \in [a,b] \subset \mathbb{R}^{+*}$

3. $x^k f(x) = \sum_{n\geqslant 1} g_n(x)$; $\lim_{x\to+\infty} g_n(x) = 0$ et $|g_n(x)| \leqslant g_n(a) = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ pour $n \geqslant \left(\frac{k}{a}\right)^2$ dont le th de dble limite donne la réponse

Exercice 33 *[sujet]* **1.** $D_f = \mathbb{R}^*$ et f est paire. f est continue par CVNTS de $\mathbb{R}^{+*}$ avec $\|f_n\|_{\infty,[a,b]} = f_n(a)$

2. Par double limite, $\lim_{+\infty} f = 1$ par CVN sur $[1,+\infty[$ avec $\|f_n\|_{\infty,[1,+\infty[} = f_n(1)$

3. Par comparaison série intégrale, $\int_0^{+\infty} e^{-x^2t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant f(x) \leqslant 1 + \int_0^{+\infty} e^{-x^2t^2}\,\mathrm{d}t$ et $\int_0^{+\infty} e^{-x^2t^2}\,\mathrm{d}t \overset{u=xt}{=} \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u$ ce qui donne $f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u$.

4.

5.

Exercice 34 *[sujet]* **1.** CSSA

2. $|f_n'(x)| \leqslant \dfrac{1}{n^2}$ si $n \geqslant 1$ donc $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n'$ CN sur $\mathbb{R}^{+*}$ (et f_0 est aussi $\mathcal{C}^1$) ; $f'(x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$ vérifie le CSSA donc $f'(x)$ est du signe de $f_0'(x) \leqslant 0$

3. Par télescopage $f(x)+f(x+1) = \dfrac{1}{x}$; par continuité de f en 1, $f(x) \underset{x\to 0}{=} \dfrac{1}{x} - f(1) + o(x) \sim \dfrac{1}{x}$ et avec la décroissance de f, on a $\dfrac{1}{2x} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{2(x-1)}$ donc $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2x}$

Exercice 35 *[sujet]* **1.** Si $y \geqslant 0$, le CSSA est vérifié. Si $y < 0$, on pose $\varphi_y(t) = t + (\ln t)^y$ et on a $\varphi_y'(t) = 1 + \dfrac{y}{t}(\ln t)^{y-1} \geqslant 1 + \dfrac{y}{t}$ donc le CSSA est vérifié pour $n \geqslant -y$.

2. Si $[a,b] \subset \mathbb{R}^+$ alors $\|R_n\|_{\infty,[a,b]} \leqslant |g_{n+1}(a)|$ donc CVUTS de $\mathbb{R}^+$. Si $[a,b] \subset \mathbb{R}^-$, le CSSA est vérifié pour tout $n \geqslant -a$ et dans ce cas $\|R_n\|_{\infty,[a,b]} \leqslant |g_{n+1}(-a)|$ donc CVUTS de $\mathbb{R}^-$ aussi.

Exercice 36 *[sujet]* si $x > 0$, $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, si $x < 0$ DVG et $f_n(0) = \dfrac{1}{1+(-1)^n n} = \dfrac{(-1)^n}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ donc $D_f = \mathbb{R}^+$.

On commence par la continuité sur $\mathbb{R}^{+*}$ par CVNTS avec $|f_n(x)| \leqslant \dfrac{e^{-na}}{n-1} = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ si $x \in [a,b] \subset \mathbb{R}^{+*}$. Puis la continuité en 0 : $f(x) - f(0) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{e^{-nx}-1}{1+(-1)^n n}$ et $\left|\dfrac{e^{-nx}-1}{1+(-1)^n n}\right| = \dfrac{1-e^{-nx}}{n+(-1)^n} \leqslant \dfrac{1-e^{-n}}{n+(-1)^n}$ si $x \in [0,1]$ donc CVN sur $[0,1]$ (donc continue en 0)

Exercice 37 *[sujet]* **1.** Si $x \in]-1,1[$ alors $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1-x^n}$_ndersetn $\to +\infty$ $\sim x^n$ donc $\sum f_n(x)$ est ACV ; si $x \in [-a,a] \subset]-1,1[$, $|f_n'(x)| \leqslant \dfrac{na^{n-1}}{(1-a^n)^2} \sim na^{n-1}$ donc $\sum f_n'$ CN sur tout segment de $]-1,1[$

2. Calcul de l'intégrale facile. Par décroissance de φ_x, on a $\displaystyle\int_1^{+\infty} \varphi_x(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(x) \leqslant f_1(x) + \int_1^{+\infty} \varphi_x(t)\,\mathrm{d}t$ donc $f(x) \underset{x\to 1}{\sim} \dfrac{\ln(1-x)}{\ln x} \sim \dfrac{\ln(1-x)}{x-1}$

Exercice 38 *[sujet]* **1.** Si $x \in]-1,1[$ alors $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1-x^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} x^n$ donc $\sum f_n(x)$ est ACV ; si $x \in [-a,a] \subset]-1,1[$, $|f_n'(x)| \leqslant \dfrac{na^{n-1}}{(1-a^n)^2} \sim na^{n-1}$ donc $\sum f_n'$ CN sur tout segment de $]-1,1[$

2. $v_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \dots \frac{1}{x^n}}$ donc $\sum v_n(x)$ vérifie le CSSA ; on a donc $|R_n(x)| \leqslant |v_{n+1}(x)| \leqslant |v_{n+1}(1)| = \dfrac{1}{n+1}$ car $|v_n|$ est une fonction croissante sur $[0,1]$.
On en déduit, par double limite, $(1-x)f(x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} v_n(x) \xrightarrow[x\to 1]{} \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$ donc $f(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} \dfrac{-\ln 2}{1-x}$

Exercice 39 *[sujet]* **1.** Cours

2. $\displaystyle\int_0^x e^{-\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \overset{u=\sqrt{t}}{=} 2\int_0^{\sqrt{x}} ue^{-u}\,\mathrm{d}u$; on trouve ensuite $t \mapsto -2e^{-\sqrt{t}}(\sqrt{t}+1)$

3. a) Si $x \in]0,1[$, $e^{\sqrt{t}\ln(x)} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ alors que si $x \geqslant 1$, $x^{\sqrt{t}} \geqslant 1$ donc $D_I =]0,1[$ puis $I(x) \overset{u=t(\ln x)^2}{=} \dfrac{1}{(\ln x)^2}\displaystyle\int_{(\ln x)^2}^{+\infty} e^{-\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$ donc $I(x) = 2\dfrac{x(1-\ln x)}{(\ln x)^2}$

b) S est définie sur $]0,1[$ (mêmes arguments que pour I) et par comparaison série/intégrale, on trouve $I(x) \leqslant S(x) \leqslant 1 + I(x)$ donc $S(x) \underset{x\to 1}{\sim} \dfrac{2}{(\ln x)^2} \sim \dfrac{2}{(1-x)^2}$

Exercice 40 *[sujet]* **1.** $u_n(t) \underset{n\to+\infty}{=} o(t^n)$ donc CS sur $[0,1[$; $u_n(1) = 0$ et DVG si $t > 1$ car $H_n \leqslant n$. La fonction u_n est décroissante (et négative) sur $]0, e^{-1/n}]$ donc si n est assez grand (dépendant de a), $\|u_n\|_{\infty,]0,a]} = -u_n(a)$ donc CN sur $]0,a]$; par contre $\|u_n\|_\infty = u_n(e^{-1/n}) = \dfrac{e^{-1}}{nH_n}$ donc avec $H_n \sim \ln(n)$, pas de CN sur $]0,1[$ (Bertrand).

2. Si $t\in]0,1[$, $|R_n(t)|\leqslant\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{t^k|\ln(t)|}{H_{n+1}}=\frac{-\ln(t)t^{n+1}}{H_{n+1}(1-t)}\leqslant\frac{-\ln(t)t}{H_{n+1}(1-t)}$; la fonction $t\mapsto\dfrac{-\ln(t)t}{1-t}$ est prolongeable par continuité au segment $[0,1]$ donc bornée ; $|R_n(t)|\leqslant\dfrac{C}{H_{n+1}}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ (valable si $t=1$) aussi donc CU sur $]0,1]$ et S est continue sur $]0,1]$.

$\dfrac{S(t)-S(1)}{t-1}=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{t^n\ln(t)}{H_n(t-1)}$ et il existe $K>0$ tel que si $t\in[1/2,1[$, $\dfrac{\ln(t)}{t-1}\geqslant K$ puis $\dfrac{S(t)-S(1)}{t-1}\geqslant K\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{t^n}{H_n}\geqslant$ $-K\ln(1-t)$ car $H_n\leqslant n$; on a donc $\dfrac{S(t)-S(1)}{t-1}\xrightarrow[t\to1]{}+\infty$ donc S n'est pas dérivable en 1.

Exercice 41 *[sujet]* **1.** Si $x>0$ $f_n(x)\underset{n\to+\infty}{\sim}e^{-nx}$ donc la série CV car $|e^{-x}|<1$ puis DVG pour $x\leqslant0$ et $D=\mathbb{R}^{+*}$.

2. $\|f_n\|_{\infty,[a,b]}=f_n(a)$ donne la continuité ; toutes les f_n sont strictement décroissantes donc f aussi.

3. $\lim\limits_{+\infty}f=0$ par double limite avec $\|f_n\|_{\infty,[1,+\infty[}=f_n(1)$.

4. Pour $x>0$, on trouve $\displaystyle\int_1^{+\infty}\ln(1+e^{-xt})\,\mathrm{d}t\leqslant f(x)\leqslant\int_0^{+\infty}\ln(1+e^{-xt})\,\mathrm{d}t$; on trouve $\displaystyle\int_0^{+\infty}\ln(1+e^{-xt})\,\mathrm{d}t\overset{y=e^{-xt}}{=}$ $\displaystyle\frac{1}{x}\int_0^1\frac{\ln(1+y)}{y}\,\mathrm{d}y=\frac{1}{x}\sum_{n\geqslant1}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$, par CVU sur $[0,1]$ car $|R_n(x)|\leqslant\dfrac{1}{n+1}$, et comme $\left|\displaystyle\int_0^1\ln(1+e^{-xt})\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\ln 2$, on trouve le même équivalent pour le terme de gauche et $f(x)\underset{0}{\sim}\dfrac{\pi^2}{12x}$

Exercice 42 *[sujet]* **1.** On prouve par récurrence que $u_n(x)\geqslant1$ donc $(u_n(x))$ est définie. $u_{n+1}(x)-u_n(x)\geqslant0$ donc $(u_n(x))$ croit ; si elle CV vers ℓ alors on a $\ell=\ell+\dfrac{1}{\ell}$ qui n'a pas de solution donc $\lim u_n(x)=+\infty$.

2. $\sum f_n(x)$ CV par CSSA avec la question 1

3. Par CSSA, $\|R_n\|_\infty\leqslant\|f_{n+1}\|_\infty=f_{n+1}(1)$ car u_n est croissante sur $[1,+\infty[$: $u'_{n+1}(x)=u'_n(x)\dfrac{u_n(x)^2-1}{u_n(x)^2}\geqslant0$ par récurrence. La CVS de (f_n) en 1 donne la CVU de $\sum f_n$ sur $[1,+\infty[$ puis la continuité de f (les f_n sont continues par récurrence).

Par contre $\|f_n\|_\infty=|f_n(1)|=u_{n+1}(1)-u_n(1)$ donc $\sum f_n(1)$ DV (série télescopique)

Exercice 43 *[sujet]* **1.** $\left|\varphi\left(\dfrac{x}{2^n}\right)\right|\leqslant C\dfrac{a}{2^n}$ donc CVN sur I

2. facile

3. si f et g sont solutions et $u=f-g$, on a $u(x)=u\left(\dfrac{x}{2}\right)\overset{\text{rec}}{=}u\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$ et, comme u est continue en 0, en faisant tendre n vers $+\infty$, on trouve $u(x)=u(0)=0$ donc u est nulle. Il y a donc une unique solution (qui est S)

4. si $u_n(x)=\varphi\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$ alors $|u'_n(x)|\leqslant\dfrac{1}{2^n}\|\varphi'\|_\infty$ car φ' est continue donc bornée sur le segment I. $\sum u'_n$ CVN sur I donc S est $\mathcal{C}^1$.

Exercice 44 *[sujet]* Si f est solution alors $\lim\limits_{n\to+\infty}f(2^{-n}x)=f(0)$ par continuité en 0 de f donc $f(x)=f(0)+\displaystyle\sum_{n\geqslant0}(f(2^{-n}x)-f(2^{-(n+1)x}))$ par télescopage puis $f(x)=f(0)+\displaystyle\sum_{n\geqslant0}\ln\left(1+\frac{x^2}{4^{n+1}}\right)$. Réciproquement, toute fonction de cette forme est solution car continue sur $\mathbb{R}$ par CN sur tout segment : $\|f_n\|_{\infty,[-a,a]}\leqslant\dfrac{a^2}{4^{n+1}}$.

Exercice 45 *[sujet]* **1.** $f_n(x)\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{x}{n^2}$ (si $x\neq0$) donc $D_f=\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}^{-*}$

2. $\|f'_n\|_{\infty,\mathbb{R}^+}\leqslant\dfrac{1}{n^2}$ donc $\sum f'_n$ CVN sur $\mathbb{R}^+$.

3. $f(1)=1$ par télescopage et $f(p)=\displaystyle\sum_{n=1}^{p}\frac{1}{n}\underset{p\to+\infty}{\sim}\ln(p)$.

Exercice 46 *[sujet]* **1.** $\|f_n\|_\infty=\dfrac{1}{n^2}$ donc f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

2. $f'_n(x)=\dfrac{1}{n(1+n^2x^2)}$ donc $\sum f'_n$ CVN sur tout segment de $\mathbb{R}^{+*}$ car $\|f'_n\|_{\infty,[a,b]}=f'_n(a)\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{n^3a^2}$ donc f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ (f est impaire) mais f n'est pas $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$: si on suppose f' continue en 0, on a, pour $x>0$ et tout $N\in\mathbb{N}^*$,

$f'(x) \geqslant \sum_{k=1}^{N} \dfrac{1}{k(1+k^2x^2)}$ puis en faisant tendre x vers 0 (somme finie et on a supposé $\lim_0 f' = f'(0)$), on aurait $f'(0) \geqslant \sum_{k=1}^{N} \dfrac{1}{k}$, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, ce qui est absurde car $\lim_{N\to+\infty} \sum_{k=1}^{N} \dfrac{1}{k} = +\infty$.

Exercice 47 *[sujet]* **1.** $|f_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{n^3}$

2. $\sum f_n'$ CVNTS $[-a,a]$ de $\mathbb{R}$ car, si $|x| \leqslant a$, $|f_n'(x)| \leqslant \dfrac{n|\sin nx|}{n^3+x^2} + \dfrac{2|x\cos nx|}{(n^3+x^2)^2} \leqslant \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2a}{n^6}$

Exercice 48 *[sujet]* **1.** $\lim_0 f = 1$ et par convexité de sh sur $\mathbb{R}^+$, on a $\operatorname{sh}(x) \geqslant x \geqslant 0$ donc $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$ sur $\mathbb{R}^+$ donc sur $\mathbb{R}$ par parité.

2. $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$

3. On applique le théorème de dérivation avec $|f_n'(x)| = \dfrac{2n\operatorname{ch}(nx)}{\operatorname{sh}^3 nx}$ qui décroit (redériver) donc $\|f_n'\|_{\infty,[a,b]} = \dfrac{2n\operatorname{ch}(na)}{\operatorname{sh}^3 na} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ si $[a,b] \subset \mathbb{R}^{+*}$

4. $f_n(x) = \dfrac{f(nx)^2}{n^2x^2}$ donc $S(x) = \dfrac{1}{x^2}\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{f(nx)^2}{n^2}$ et par double limite, $\lim_{x\to 0} \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{f(nx)^2}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2}$ car $\left|\dfrac{f(nx)^2}{n^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{n^2}$ donc CVN sur $]0,1]$

5. $\dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{\operatorname{sh} x}{x}$ est $\mathcal{C}^\infty$ car DSE sur $\mathbb{R}$ (utiliser le DSE de sh) et ne s'annule pas car $f(0) = 1$ donc f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 49 *[sujet]* **1.** Par CSSA avec $\sqrt{n+x} - \sqrt{n} = \dfrac{x}{\sqrt{n+x}+\sqrt{n}}$

2. CVUTS sur $\mathbb{R}^+$ avec CSSA et $|R_n(x)| \leqslant |f_{n+1}(x)| \leqslant \sqrt{n+1+b} - \sqrt{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}^+$.

$f_n'(x) = \dfrac{(-1)^n}{2\sqrt{n+x}}$ donc CVUTS par CSSA avec $\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k'(x)\right| \leqslant \dfrac{2}{\sqrt{n+a}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. (pas sur $\mathbb{R}^+$ car f_0 n'est pas dérivable en 0). Puis $f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{2(-1)^n}{\sqrt{n+x}} \geqslant 0$ tjs par CSSA

3. Si f ne tend pas vers $+\infty$ en $+\infty$ alors f CV vers ℓ (croissante) et $f(x) \leqslant \ell$. Comme $R_n(x)$ est du signe de $f_{n+1}(x)$, $R_{2n+1}(x) \geqslant 0$ donc $\ell \geqslant f(x) = S_{2n+1}(x) + R_{2n+1}(x) \geqslant S_{2n+1}(x) = \sum_{p=0}^{n} f_{2p}(x) - f_{2p+1}(x)$. Comme $\lim_{x\to+\infty} f_{2p}(x) - f_{2p+1}(x) = \sqrt{2p+1} - \sqrt{2p}$, en faisant tend x vers x vers $+\infty$ (somme finie), on aurait $\ell \geqslant \sum_{p=0}^{n} \sqrt{2p+1} - \sqrt{2p}$, pour tout n ; ce qui est absurde puisque c'est la somme partielle d'une SATP DV

Exercice 50 *[sujet]* **1.** $u_n(x) = o\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$

2. $\|u_n\|_{\infty,[-a,a]} = u_n(a)$ donc CVNTS

3. u_n n'est pas bornée sur $\mathbb{R}$

4. $S(0) = 0$ et $S(x) \geqslant u_1(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$

5. $u_n'(x) = \dfrac{2x}{n(1+nx^2)}$ donc $\|u_n'\|_\infty = u_n'\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) = \dfrac{1}{n^{3/2}}$

6. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \dfrac{2x}{t(1+tx^2)}\,\mathrm{d}t \leqslant S'(x) \leqslant \int_1^{+\infty} \dfrac{2x}{t(1+tx^2)}\,\mathrm{d}t + u_1'(x)$ donc $S'(x) \underset{x\to 0}{\sim} -4x\ln(x)$

Exercice 51 *[sujet]* **1.** Si $x \neq 0$ alors $u_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2}{n^2}$ et $u_n(0) = 0$ donc $D = \mathbb{R}$ (et S est paire.

2. $\|u_n\|_{\infty,[-a,a]} = u_n(a)$ donc CN sur tout segment de $\mathbb{R}$.

3. Pour $x > 0$, $0 \leqslant u_n'(x) = \dfrac{2x}{\ln(1+n)(1+n^2x^2)} \leqslant \displaystyle\int_{n-1}^{n} \dfrac{2x}{\ln(1+t)(1+t^2x^2)}\,\mathrm{d}t$ donc $\sum u_n'(x)$ CS et $0 \leqslant R_n(x) \leqslant \displaystyle\int_n^{+\infty} \dfrac{2x}{\ln(1+t)(1+t^2x^2)}\,\mathrm{d}t \leqslant \dfrac{1}{\ln(1+n)}\int_n^{+\infty} \dfrac{2x}{1+x^2t^2}\,\mathrm{d}t = \dfrac{2}{\ln(1+n)}\Big[\arctan(xt)\Big]_{t=n}^{t=+\infty} \leqslant \dfrac{\pi}{\ln(1+n)}$ donc CVU sur $\mathbb{R}^+$ puis sur $\mathbb{R}$ par imparité.

4. Facile

Exercice 52 *[sujet]* **1.** $f_n(0) = \dfrac{1}{n}$ et $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{xn^2}$ (signe fixe) donc $D_S = \mathbb{R} \setminus \{-1/n, n \in \mathbb{N}^*\}$

2. $f_n'(x) = \dfrac{-1}{n(nx+1)^2}$ donc $\|f_n'\|_\infty^{[a,b]} = \dfrac{1}{n(na+1)^2} \sim \dfrac{1}{n^3a^2}$ donc $\sum f_n'$ CVNTS de $\mathbb{R}^{+*}$

3. $\left|S(s) - \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2 x}\right| = \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2x(nx+1)} \leqslant \frac{1}{x^2}\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^3}$ donc $S(x) \underset{x\to+\infty}{=} \dfrac{1}{x}\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2} + O\left(\frac{1}{x^2}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$.

Exercice 53 *[sujet]* **1.** Si $x < 0$ alors DVG et sur $\mathbb{R}^+$, $\|f_n\|_\infty \leqslant \dfrac{1}{1+n^2}$ donc CS et CN sur $\mathbb{R}^{+*}$

2. oui : cf **1.**

3. Par double limite et CN sur $\mathbb{R}^+$, $\lim\limits_{+\infty} f = 1$

4. Si $[a,b] \subset \mathbb{R}^{+*}$, $\|f_n\|_{\infty,[a,b]} = \dfrac{ne^{-na}}{1+n^2} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ donc $\sum f_n'$ CN sur tout segment de $\mathbb{R}^{+*}$

5. $-f'(x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{n}{n^2+1}e^{-nx}$ est décroissante donc admet une limite $l \in \mathbb{R} \cap +\infty$ en 0 ; si $l \neq +\infty$ alors pour tout N, on a $l \geqslant \displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{n}{n^2+1}e^{-nx}$ puis quand $x \to 0$ (somme finie), $l \geqslant \displaystyle\sum_{n=0}^{N}\frac{n}{n^2+1}$ ce qui est absurde puisque la somme partielle de cette SATP DV vers $+\infty$; on a donc $\lim\limits_0 f' = -\infty$ et comme f est continue sur $\mathbb{R}^+$, par le TAF, on obtient que $\lim\limits_0 \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_0 f' = -\infty$

Exercice 54 *[sujet]* **1.** $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ si $x > 0$, $f_n(0) = 0$ et DVG si $x > 0$ donc $D_f = \mathbb{R}^+$.

2. Si $[a,b] \subset \mathbb{R}^{+*}$, $\|f_n'\|_{\infty,[a,b]} \leqslant \dfrac{e^{-na}(1+nb)}{\ln n}$ donc $\sum f_n'$ CVN sur tout segment de $\mathbb{R}^{+*}$

3. $g(x) = \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{e^{-nx}}{\ln n}$ est une fonction décroissante donc tend vers $l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ en 0 ; comme la série est à termes positifs, on a $g(x) \geqslant \displaystyle\sum_{n=2}^{N}\frac{e^{-nx}}{\ln n}$ pour tout $N \geqslant 2$; si on suppose l finie, quand $x \to 0$, on obtient $l \geqslant \displaystyle\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{\ln n}$ pour tout N ce qui est absurde (somme partielle d'une SATP DV). On en déduit $l = +\infty$ donc f n'est pas dérivable en 0.
On prouve la CVU de $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}^+$ (car il n'y a pas CVN) : $|R_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{\ln(n+1)}\displaystyle\sum_{k\geqslant n+1} xe^{-kx} = \frac{1}{\ln(n+1)} \times \frac{xe^{-(n+1)x}}{1-e^{-x}} \leqslant \frac{1}{\ln(n+1)}\frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}} \leqslant \frac{C}{\ln(n+1)}$ car $x \mapsto \dfrac{xe^{-x}}{1-e^{-x}}$ est bornée sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Exercice 55 *[sujet]* **1.** CSSA (indispensable pour $x = 0$)

2. CVU sur $\mathbb{R}^+$ car, par CSSA, $|R_n(x)| \leqslant |u_{n+1}(x)| \leqslant \dfrac{1}{n+1}$

3. CVNTS de $\sum u_n'$ car $|u_n'(x)| \leqslant e^{-na}$ pour $x \in [a,b] \subset \mathbb{R}^{+*}$

4. On a aussi $S'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}e^{-nx} = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$ donc $S(x) = -\ln(1-e^{-x}) + C$ pour $x > 0$. On trouve ensuite $C = 0$ car $C = \lim\limits_{x\to+\infty} S(x) = 0$ par double limite (et CVU sur $\mathbb{R}^+$) et on étend à $x = 0$ par continuité de S en 0 (donc $S(0) = -\ln(2)$)

Exercice 56 *[sujet]* **1.** Sur $\mathbb{R}^+$, $\|f_n\|_\infty = \dfrac{1}{n^2}$ donc CN sur $\mathbb{R}^+$ et DVG si $x < 0$.

2. Continue sur $\mathbb{R}^+$ par CN sur $\mathbb{R}^+$. Puis $u_n'(x) = \dfrac{-e^{-nx}}{n} \underset{n\to+\infty}{=} o(e^{-nx})$ donc $\sum f_n'$ CS sur $\mathbb{R}^{+*}$ et si $[a,b] \subset \mathbb{R}^{+*}$, $\|u_n''\|_{\infty,[a,b]} = e^{-na}$ donc $\sum u_n''$ CN sur tout segment de $\mathbb{R}^{+*}$

3. $f''(x) = \dfrac{e^{-x}}{1-e^{-x}}$ puis $f'(x) = C + \ln(1-e^{-x})$ avec $C = \lim\limits_{+\infty} f' = 0$ car $\|f_n'\|_{\infty,[1,+\infty[} = \dfrac{e^{-n}}{n} \underset{n\to+\infty}{=} o(e^{-n})$ donc $\sum f_n'$ CN sur $[1,+\infty[$ et le théorème de double limite donne la limite de f' en $+\infty$.

4. On a $\lim\limits_0 f' = -\infty$ et f est continue sur $\mathbb{R}^+$ donc le TAF donne f non dérivable en 0.

5. $t \mapsto \ln(1-e^{-t})$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ (car $\underset{t\to 0}{\sim} \ln(t)$) donc $x \mapsto \int_0^x \ln(1-e^{-t})\,dt$ est la primitive de f' qui tend vers 0 en 0, c'est donc $f - f(0)$.

Exercice 57 *[sujet]* **1.** Si $|x| < 1$ alors $u_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} x^n$ donc la série est ACV, si $x \geqslant 1$, DVG et si $x \leqslant -1$ les termes n'existent pas

2. $\|u_n\|_{\infty,[-a,a]} \leqslant a^n$ donc CN sur tout segment de $]-1,1[$ puis continuité sur $]-1,1[$; $\|u_n'\|_{\infty,[-a,a]} \leqslant na^{n-1} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ donc $\sum u_n'$ CN sur tout segment de $]-1,1[$. On a alors $f'(0) = 1$ et par Taylor-Young, $f'(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$.

3. ϕ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}^+$ et $\phi(t) \underset{t\to+\infty}{e}^{t\ln(x)}$ avec $\ln(x) < 0$ donc ϕ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Par comparaison à une intégrale, f est équivalente en 1 à $\displaystyle\int_0^{+\infty} \phi(t)\,dt \overset{u=e^{t\ln(x)}}{=} \frac{-1}{\ln(x)} \int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u}\,dt$

Exercice 58 *[sujet]* **1.** Si $x \neq 0$ alors $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1/x}{n^2}$ (signe fixe) donc $D_f = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$

2. Si $[a,b] \subset \mathbb{R}^{+*}$, $\|f_n'\|_{\infty,[a,b]} \leqslant \dfrac{1}{n^2a^2}$ donc $\sum f_n'$ CN sur tout segment de $\mathbb{R}^{+*}$

3. Par comparaison avec une intégrale, f est équivalente à $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t+t^2x}$ en 0 puis calculer cette intégrale.

En $+\infty$, $xf(x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2+n/x}$ qui CN sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $\left|\dfrac{1}{n^2+n/x}\right| \leqslant \dfrac{1}{n^2}$ et le théorème de double limite donnera $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$.

Exercice 59 *[sujet]* **1.** Si $x \neq 0$, $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{xn^2}$ et $f_n(0) = 0$ donc CS sur $\mathbb{R}$ (et impaire). De plus, si $[a,b] \subset \mathbb{R}^{+*}$, $\|f_n\|_{\infty,[a,b]} \leqslant \dfrac{b}{n(1+na^2)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{b}{an^2}$ donc CN sur tout segment de $\mathbb{R}^{+*}$ et continuité sur $\mathbb{R}^{+*}$; de même $\|f_n'\|_{\infty,[a,b]} \leqslant \dfrac{1+nb^2}{n(1+na^2)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{b^2}{a^2n^2}$ donc $\sum f_n'$ CN sur tout segment de $\mathbb{R}^{+*}$ et f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Pour la continuité en 0 : si $x > 0$, par comparaison à une intégrale, f est équivalente en 0 à $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x\,dt}{t(1+tx^2)} \underset{x\to 0}{\overset{\text{calcul}}{\sim}} -2x\ln(x)$ donc f est bien continue en 0 mais pas dérivable car le même calcul donne $\dfrac{f(x)}{x} \underset{x\to 0}{\sim} -\ln(x)$

2. $xf(x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1/x^2)}$ et $\left|\dfrac{1}{n(n+1/x^2)}\right| \leqslant \dfrac{1}{n^2}$ donc CN sur $[1,+\infty[$ et me théorème de double limite donne $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{x}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$.

Exercice 60 *[sujet]* **1.** CSSA

2. CSSA puis $\|R_n\|_\infty \leqslant \dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

3. 0 par double limite

4. Si $[a,b] \subset]-(n+1), n[$, le CSSA est vérifié pour $n \geqslant -a$ et on a $\|R_n\|_{\infty,[a,b]} \leqslant \dfrac{1}{n+a}$

5. $\|u_n'\|_{\infty,[a,b]} \leqslant \dfrac{1}{(n+a)^2}$ (pour $n \geqslant -a$ si $[a,b] \subset]-(n+1), -n)[$) donc $\sum u_n'$ CVNTS de D_S

Exercice 61 *[sujet]* **1.** Fait en cours

2. Fait en cours (séparer les termes pairs et impairs dans $\eta(x)$)

3. Fait en cours

4. η est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ fait en cours puis $\zeta(x) \underset{x\to 1}{=} \dfrac{1}{1-e^{(x-1)\ln 2}}(\eta(1)+(x-1)\eta'(1)+o(x-1))$ donne le résultat en utilisant $\eta(1) = \ln 2$ (fait en cours, soit avec le développement asymptotique de H_n, soit à partir du DSE de $\ln(1+x)$ qui CU sur $[0,1]$ grâce au CSSA)

5. Poser $v_n = u_n - \dfrac{1}{2}(\ln n)^2$, montrer que $\sum(v_{n+1}-v_n)$ CV (par DL) donc (v_n) CV vers un réel l. En séparant les termes pairs et impairs, on trouve $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k \ln k}{k} = (\ln 2)H_n + u_n - u_{2n}$ et comme $u_n = \dfrac{(\ln n)^2}{2} + l + o(1)$, on obtient le résultat annoncé.

Exercice 62 *[sujet]* **1.** $x > 1$

2. cours

3. $2^x(\zeta - 1) = \sum_{n \geqslant 2} \frac{2^x}{n^x}$ CN sur $[3, +\infty[$ car $\left|\frac{2^x}{n^x}\right| \leqslant \frac{1}{(n/2)^3}$ et le théorème de double limite donne $\zeta - 1 \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2^x} = e^{-x \ln(2)}$ donc $\zeta - 1$ est intégrable sur $[2, +\infty[$. On termine par TITT avec $\int_2^{+\infty} \left|\frac{1}{n^x}\right| \mathrm{d}t = \frac{1}{n^2 \ln(n)} \underset{n \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Exercice 63 *[sujet]* **1.** Si $x \notin \{0\} \cup \{-1/n, n \in \mathbb{N}^*\}$ alors $\sum f_n(x)$ CV par CSSA (vérifié à partir d'un certain rang donc $D = \mathbb{R}^* \setminus \{-1/n, n \in \mathbb{N}^*\}$. Si $[a, b] \subset \mathbb{R}^{+*}$, on a, par CSSA, $\|R_n\|_{\infty,[a,b]} \leqslant \frac{1}{1 + na} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, si $[a, b] \subset \left]-\frac{1}{N}, -\frac{1}{N+1}\right[$ alors le CSSA est vérifié pour $n \geqslant N + 1$ donc on a $\|R_n\|_{\infty,[a,b]} \leqslant \frac{1}{1 + nb}$ et si $[a, b] \subset]-\infty, -1[$, le CSSA donne $\|R_n\|_{\infty,[a,b]} \leqslant \frac{1}{1 + nb}$ donc CVU sur tout segment de D.

2. Sur $\mathbb{R}^{+*}$, $\sum f_n'(x)$ vérifie le CSSA donc si $[a, b] \subset \mathbb{R}^{+*}$, $\left\|\sum_{k=1+n}^{+\infty} f_k'(x)\right\|_{\infty,[a,b]} \leqslant \frac{n}{(1 + na)^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ donc $\sum f_n'$ CVU sur tout segment de $\mathbb{R}^{+*}$.

3. Par CVU de $\sum f_n$ sur $[1, +\infty[$ (par CSSA et majoration du reste), on a $\lim_{+\infty} f = 1$ puis $f(x) - 1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1 + nx} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x} \sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$ car $\left|f(x) - 1 - \sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^n}{nx}\right| \leqslant \frac{1}{x^2} \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2}$

Exercice 64 *[sujet]* **1.** La série CV toujours par CSSA (vérifié à partir d'un certain rang mais qui dépend de x !). On a $f(x) - \sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \sum_{n \geqslant 1} (-1)^n \frac{x^2}{n(n^2 + x^2)}$ vérifie le CSSA dès $n = 1$ donc $|R_n(x)| \leqslant \frac{x^2}{(n+1)((n+1)^2 + x^2)} \leqslant \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ donc CU sur $\mathbb{R}$ puis $\lim_0 f = f(0)$

2. $f_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{2}\left(\frac{i}{x + in} - \frac{i}{x - in}\right)$ donc $f_n^{(k)} = \frac{(-1)^{n-1}}{2}\left(\frac{(-1)^k i k!}{(x + in)^{k+1}} - \frac{(-1)^k i k!}{(x - in)^{k+1}}\right)$ ce qui donne la CN sur $\mathbb{R}$ de $\sum f_n^{(k)}$ par $|f_n^{(k)}(x)| \leqslant \frac{k!}{(x^2 + n^2)^{k+1}} \leqslant \frac{k!}{n^{2(k+1)}}$ avec $k \geqslant 1$ (la CS pour $k = 0$ suffit et a déjà été prouvée).

Exercice 65 *[sujet]* **1.** Si $|x| < 1$, alors $f_n(x) \underset{n \to +\infty}{\sim} nx^{2n-1} \underset{n \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et si $|x| > 1$ alors $f_n(x) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{-n}{x}$ donc DVG

2. $|f_n'(x)| \leqslant n\frac{(2n - 1)a^{2n-2} + a^{4n-2}}{(1 - a^{2n})^2} \underset{n \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ si $x \in [-a, a] \subset]-1, 1[$ donc $\sum f_n'$ CN sur tout segment de $]-1, 1[$; $f'(x) = \sum_{n \geqslant 1} n\frac{(2n - 1)x^{2n-2} + x^{4n-2}}{(1 - x^{2n})^2} \geqslant 0$.

Exercice 66 *[sujet]* **1.** Par récurrence sur n en remarquant que si $u_n(t) \leqslant \frac{t^n}{n!}$ alors $u_n(t - t^2) \leqslant \frac{t^n(1 - t)^n}{n!} \leqslant \frac{t^n}{n!}$

2. $\|u_n\|_\infty \leqslant \frac{1}{n!}$ donc $\sum u_n$ CN sur $[0, 1]$ vers i telle que (intégration sur un segment avec CN) $u(x) = \int_0^x u(t - t^2)\,\mathrm{d}t$; comme $t \mapsto u(t - t^2)$ est continue, u est $\mathcal{C}^1$ et $u'(t) = u(t - t^2)$.

Exercice 67 *[sujet]* **1.** f_n est continue par récurrence

2. Par récurrence sur n : f_n est $\mathcal{C}^n$, $f_n^{(k)}(a) = 0$ si $k \leqslant n - 1$ et $f_n^{(n)} = f$. Avec Taylor, on en déduit $f_n(x) = \int_a^x \frac{(x - t)^{n-1}}{(n - 1)!} f(t)\,\mathrm{d}t$

3. $\|f_n\|_{\infty,[a,x]} \leqslant \|f\|_{\infty,[a,x]} \frac{(x - a)^n}{n!}$ donc CN sur le segment $[a, x]$ (ou $[x, a]$) et $g(x) = \int_a^x f(t) \sum_{n \geqslant 1} \frac{(x - t)^{n-1}}{(n - 1)!}\,\mathrm{d}t = \int_a^x f(t)e^{x-t}\,\mathrm{d}t$

4. $g(x) = e^x \int_a^x f(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t$ est donc $\mathcal{C}^1$ et solution de $y'(x) - y(x) = f(x)$

Exercice 68 *[sujet]* **1.** f_n est $\mathcal{C}^1$ par réc et $f'_{n+1} = f_n$ puis $S' = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n = f'_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} f_{n-1} = f'_0 + S$. On en déduit $S(x) = \alpha e^x + e^x \int_a^x e^{-t} f'_0(t)\,\mathrm{d}t$ et $S(a) = f_0(a)$ donne $\alpha = e^{-a} f_0(a)$

2. $\|f'_n\|_\infty = \|f_{n-1}\|_\infty$

3. $\|f_n\|_\infty \leqslant \frac{1}{2^n}$ donc $\sum f_n$ CVU sur $[0,1]$ et $S(x) = e^x \int_0^x e^{-t}\sin(2t)\,\mathrm{d}t = e^x \operatorname{Im}\left(\int_0^x e^{-(1+2i)t}\,\mathrm{d}t\right) = \dots$

Exercice 69 *[sujet]* On pose $f_n(t) = \frac{ne^{-t}+t^2}{n+t}$; (f_n) CS sur $[0,1]$ vers $f : t \mapsto e^{-t}$ et $|f_n(t) - e^{-t}| \leqslant \frac{1+e^{-1}}{n}$ donc (f_n) CU sur $[0,1]$ vers f ; par intégration $\lim u_n = \int_0^1 e^{-t}\,\mathrm{d}t = 1 - e^{-1}$.

Exercice 70 *[sujet]* **1.** On a $P_n^{(k)}(0) = 0$ si $k < n$ ou $k > 2n$ et, si $k \in [\![n, 2n]\!]$, par la formule de Leibniz, $P_n^{(k)}(0) = \binom{k}{n} n(n-1)\dots(2n-k+1)bp^{k-n}(-a)^{2n-k}$ est entier. Puis $P_n(r-X) = P_n(X)$ donne les dérivées en r par symétrie.

2. $u_n = q\int_0^r P_n(t)e^t\,\mathrm{d}t$ est un entier par IPP successives avec la question précédente et le fait que $qe^r \in \mathbb{Z}$. On a $\|P_n \exp\|_\infty \leqslant \frac{1}{n!} r^n (br)^n e^r$ donc $(P_n \exp)$ CU sur $[0,r]$ vers 0 et par intégration (u_n) tend vers 0. Or (u_n) est une suite d'entiers, elle est donc nulle à partir d'un certain rang et comme $P_n \exp$ est continue et positive sur $[0,r]$, on en déduit $P_n \exp = 0$ sur $[0,r]$ ce qui est absurde. On vient donc de prouver par l'absurde que si $r \in \mathbb{Q}$ alors e^r est irrationnel donc en particulier (avec $r = 1$), e est irrationnel.

Exercice 71 *[sujet]* **1.** Par récurrence : si f_n est $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ alors $t \mapsto \sqrt{f_n(t)^2 + t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc f_{n+1} est $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

2. $f_{n+1}(x) - f_n(x) = \int_0^x (f_n(t) - f_{n-1}(t)) \frac{f_n(t)+f_{n-1}(t)}{\sqrt{t^2+f_n(t)^2} + \sqrt{t^2+f_{n-1}(t)^2}}\,\mathrm{d}t$ donne le résultat par récurrence sur n car $\left|\frac{f_n(t)+f_{n-1}(t)}{\sqrt{t^2+f_n(t)^2} + \sqrt{t^2+f_{n-1}(t)^2}}\right| \leqslant 1$.

On en déduit $\|f_{n+1} - f_n\|_{\infty,[-a,a]} \leqslant \frac{a^{n+1}}{(n+1)!}$ donc $\sum(f_{n+1} - f_n)$ CN sur tout segment de $\mathbb{R}$ ce qui donne la CS de (f_n) et la continuité de $f = \sum_{n\geqslant 1}(f_{n+1} - f_n)$ par télescopage.

3. Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, on vérifie la CU de (g_n) sur $[0,x]$ (ou $[x,0]$) avec $g_n(t) = \sqrt{t^2 + f_n(t)^2}$ car $|g_n(t) - \sqrt{t^2+f(t)^2}| = |f_n(t) - f(t)| \frac{f_n(t)+f(t)}{\sqrt{t^2+f_n(t)^2} + \sqrt{t^2+f(t)^2}} \leqslant \|f_n - f\|_{\infty,[0,x]}$ donc par intégration, on obtient $\lim_{n\to+\infty} f_{n+1}(x) = \int_0^x \sqrt{t^2+f(t)^2}\,\mathrm{d}t$ puis $f(x) = \int_0^x \sqrt{t^2+f(t)^2}\,\mathrm{d}t$ ce qui prouve que f est $\mathcal{C}^1$ par continuité de f et, en dérivant, $f'(x) = \sqrt{x^2+f(x)^2}$.

Exercice 72 *[sujet]* **1.** on pose $g_n(x) = \sin^\alpha(x)\cos^n(x)$ géométrique de raison $\cos(x)$ donc $\sum g_n(x)$ ACV si $|\cos x| < 1$ et si $\cos(x) = \pm 1$ alors $f_\alpha(x) = 0$ donc $D_\alpha = \mathbb{R}$

2. $f_\alpha(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin^\alpha x}{1-\cos x} & \text{si } x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

3. $f_\alpha(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{2}{x^{2-\alpha}}$ donc f_α intégrable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ si et seulement si $\alpha > 1$

4. $\|g_n\|_\infty = g_n\left(\arctan\sqrt{\frac{\alpha}{n+1}}\right) = \left(\sqrt{\frac{\alpha}{n+1}}\right)^\alpha \left(1+\frac{\alpha}{n+1}\right)^\alpha \left(1+\frac{\alpha}{n+1}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\alpha^{\alpha/2}e^{-\alpha}}{n^{\alpha/2}}$ donc CVN si et seulement si $\alpha > 2$. Pour $\alpha \leqslant 2$ f_α n'est pas continue en 0 donc pas de CVU

5. a) $u_n(\alpha) \geqslant 0$ et, si $\alpha > 1$, $\sum_{n=0}^{N} u_n(\alpha) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{N} \sin^\alpha x \cos^n x\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_\alpha(x)\,\mathrm{d}x$; SATP dont les sommes partielles sont majorées donc $\sum u_n(\alpha)$ CV. Pour $\alpha \leqslant 1$, $u_n(\alpha) \geqslant u_n(1) = \left[-\frac{\cos^{n+1} x}{n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{n+1}$ donc $\sum u_n(\alpha)$ DV

b) $u_n(3) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x(1-\cos^2 x)\cos^n x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3}$ donc, par CVN sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_3(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3}\right) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

Exercice 73 *[sujet]* **1.** $\|u_n\| \leqslant |\alpha_n|$ donc CVN sur $[0,1]$

2. Par CVN, $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n\geqslant 1}\int_0^1 u_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n\geqslant 1}\alpha_n \frac{\sin(2\pi\omega_n)}{2\pi\omega_n}$

3. f est $\mathcal{C}^0$ sur $[0,1]$ donc $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f\left(\frac{k}{N}\right) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ (somme de Riemann).

Exercice 74 *[sujet]* **1.** $t^{xt^y} = e^{xt^y\ln(t)} \xrightarrow[t\to 0]{} 0$ car $y > 0$.

2. $\|f_n\|_\infty = \dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{|x|}{ey}\right)^n$

3. Les f_n sont continues sur $[0,1]$ donc on peut intervertir $\sum/\int$ sur le segment $[0,1]$ par CN : $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n(t) = t^{xt^y}$ par DSE de exp et $\displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t \overset{n\text{IPP}}{=} \frac{(-1)^{n+1}}{n^n}$

Exercice 75 *[sujet]* **1.** Si $x\in[-a,a]$ alors pour $n\geqslant a$, on a $(x+n)^2 \geqslant (a+n)^2$ et $(x-n)^2\geqslant (n-a)^2$ donc $\|f_n\|_{\infty,[-a,a]} \leqslant \dfrac{C}{(n+a)^2}+\dfrac{C}{(n-a)^2}$ donc CVNTS de $\mathbb{R}$.

2. Les deux séries CV donc, avec des changements d'indices, $f(x+1) = \varphi(x+1) + \displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty}\varphi(x+k) + \sum_{h=0}^{+\infty}\varphi(x-h) = f(x)$

3. g est continue sur $\mathbb{R}$ et 1-périodique donc bornée et $|\varphi(x)g(x)| \leqslant \dfrac{C\|g\|_\infty}{1+x^2}$, intégrable sur $\mathbb{R}$.

$\|f_n g\|_{\infty,[0,1]} \leqslant \|g\|_\infty \|f_n\|_{\infty,[0,1]}$ donc la série CVN sur $[0,1]$ et on a $\displaystyle\int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \varphi(x)g(x)\,\mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^1 \varphi(x+n)g(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \varphi(x-n)g(x)\,\mathrm{d}x$. Par changements de variables et avec la 1-périodicité de g, on a $\displaystyle\int_0^1 \varphi(x+n)g(x)\,\mathrm{d}x = \int_n^{n+1}\varphi(u)g(u)\,\mathrm{d}u$ et $\displaystyle\int_0^1 \varphi(x-n)g(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-n}^{-n+1}\varphi(u)g(u)\,\mathrm{d}u$ ce qui donne, avec Chasles, $\displaystyle\int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)g(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 76 *[sujet]* TCD à chaque fois

1. $\left|\dfrac{\cos\frac{t}{n}}{1+t^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{1+t^2}$ donc limite $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$.

2. $\left|\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^{-n} x^{-\frac{1}{n}}\right| \leqslant \begin{cases}\left(1+\dfrac{x}{2}\right)^{-2} & \text{si } x\geqslant 1\\ \dfrac{1}{\sqrt{x}} & \text{si } x\in]0,1[\end{cases}$ si $n\geqslant 2$ donc limite $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x = 1$.

3. On prolonge par 0 sur $]n,+\infty[$ puis $|f_n(x)|\leqslant e^{-x}$ donc limite $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}t = 1$.

4. $\left|x^n\dfrac{\ln x}{(1-x^2)^{1/4}}\right| \leqslant \dfrac{|\ln x|}{(1-x^2)^{1/4}}$ donc limite $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{(1-x^2)^{1/4}}\,\mathrm{d}x$

Exercice 77 *[sujet]* $\left|\dfrac{1}{1+x^2+x^n e^{-x}}\right| \leqslant \dfrac{1}{1+x^2}$ donc limite $\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 78 *[sujet]* **1.** $f(t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{t^{\alpha-1}}$ et $f(t)\underset{t\to+\infty}{\sim}\dfrac{\pi}{2t^\alpha}$ donc f_α est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ si et seulement si $\alpha\in]1,2[$.

2. $|f_n(t)| \leqslant f_{3/2}$ donc limite $\displaystyle\int_0^1\frac{\arctan t}{t^{3/2}}\,\mathrm{d}t$

Exercice 79 *[sujet]* **1.** Étude de fct

2. $\dfrac{\sin(t/n)}{t(1+t^2)} \xrightarrow[t\to 0]{} \dfrac{1}{n}$ et $\dfrac{\sin(t/n)}{t(1+t^2)} \underset{t\to+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{t^3}\right)$ donc I_n existe.

3. $|I_n| \leqslant \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ (qui existe) par Q1 donc $\lim I_n = 0$. Puis par TCD, $nI_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$ car $\left|\dfrac{n\sin(t/n)}{t(1+t^2)}\right| \leqslant \dfrac{1}{1+t^2}$ par Q1

Exercice 80 *[sujet]* **1.** $\dfrac{\sin(nx)}{1+n^4x^3} \underset{x\to+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$

2. Poser $t = xn^{4/3}$

3. Par TCD avec $|f_n(t)| \leqslant \dfrac{t}{1+t^3}$ $(|\sin(u)| \leqslant |u|)$

4. Ajouter les 2 valeurs de K puis $2K = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1-t+t^2} = \frac{4}{3}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\arctan\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right]_0^{+\infty}$

5. facile

Exercice 81 *[sujet]* **1.** $f_n(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2x^{3/2}}$

2. $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{\pi}{2}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(n+x)} \overset{x=u^2}{=} \pi\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{n+u^2} = \frac{\pi^2}{2\sqrt{n}}$

3. fait au dessus

4. $\arctan(n)\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(n+x)} \leqslant I_n \leqslant \frac{\pi}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(n+x)}$ donne $I_n \sim \dfrac{\pi^2}{2\sqrt{n}}$

Exercice 82 *[sujet]* **1.** f_n est continue sur le segment $[0,1]$

2. $0 \leqslant I_n \leqslant \displaystyle\int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}$ donc $\lim I_n = 0$ (ou TCD)

3. On pose $u = t^n \Leftrightarrow t = u^{1/n}$ qui donne $I_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u}u^{1/n}\,\mathrm{d}u$ puis TCD avec $g_n(u) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{\ln(1+u)}{u}$ et $|g_n(u)| \leqslant \dfrac{\ln(1+u)}{u}$ intégrable sur $]0,1]$ car $\displaystyle\lim_{u\to0} \frac{\ln(1+u)}{u} = 1$; on finit avec $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u}\,\mathrm{d}u \neq 0$

4. si $u \in]0,1[$, $\dfrac{\ln(1+u)}{u} = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{u^{n-1}}{n}$ puis TITT avec $\displaystyle\int_0^1 \left|(-1)^{n+1}\frac{u^{n-1}}{n}\right|\mathrm{d}u = \frac{1}{n^2}$; on en déduit $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u}\,\mathrm{d}u = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ puis en séparant les termes pairs/impairs (sur la somme partielle !), $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$

Exercice 83 *[sujet]* **1.** $\dfrac{\arctan(nt)}{(1+n^4t^2)^2} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2n^8t^4}$

2. $\lim I_n = 0$ par TCD avec $\left|\dfrac{\arctan(nt)}{(1+n^4t^2)^2}\right| \leqslant \dfrac{\pi/2}{(1+t^2)^2}$ puis $I_n \overset{u=n^2t}{=} \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(u/n)}{(1+u^2)^2}\,\mathrm{d}u$ donc $\lim n^3 I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u}{(1+u^2)^2}\,\mathrm{d}u = 1$ par TCD avec $\left|\dfrac{\arctan(u/n)}{(1+u^2)^2}\right| \leqslant \dfrac{\pi/2}{(1+u^2)^2}$

Exercice 84 *[sujet]* **1.** fct continue sur $[0,1]$

2. $0 \leqslant I_n \leqslant \displaystyle\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}$ donc $\lim I_n = 0$ (ou par TCD en dominant par 1) ; on pose $u = x^n$: $nI_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{u^{1/n}}{1+u^{1/n}+u^{2/n}}\,\mathrm{d}u \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{3} = \frac{1}{3}$ par TCD avec $\left|\dfrac{u^{1/n}}{1+u^{1/n}+u^{2/n}}\right| \leqslant 1$.

Exercice 85 *[sujet]* **1.** $\ln(x)\ln(1-x^n) \underset{x\to0}{=} o(\ln x)$ et $\ln(x)\ln(1-x^n) \underset{x\to1}{\sim} (x-1)\ln(1-x^n) \xrightarrow[x\to1]{} 0$.

2. $|\ln(x)\ln(1-x^n)| = |\ln x| \times (-\ln(1-x^n)) \leqslant |\ln x| \times (-\ln(1-x))$ donc $\lim I_n = 0$.

3. $I_n \overset{u=x^n}{=} \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln u\ln(1-u)}{u}u^{1/n}\,\mathrm{d}u$ puis $\left|\dfrac{\ln u\ln(1-u)}{u}u^{1/n}\right| \leqslant \dfrac{\ln u\ln(1-u)}{u}$ qui est intégrable sur $]0,1[$ (car $\underset{u\to0}{\sim} \ln u$ et $\xrightarrow[u\to1]{} 0$) donc $I_n \sim \dfrac{C}{n^2}$ avec $C = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln u\ln(1-u)}{u}\,\mathrm{d}u > 0$.

Exercice 86 *[sujet]* **1.** $\operatorname{sh} x = 1 \overset{X=e^x}{\Leftrightarrow} X^2 - 2X - 1 = 0 \Leftrightarrow X = 1+\sqrt{2}$ car $X = e^x > 0$

2. $\lim I_n = 0$ par TCD car $|\operatorname{sh}^n t| \leqslant 1$ sur $[0,\alpha]$

3. IPP

4. (I_n) est décroissante donc $(2n-1)I_n \leqslant nI_n + (n-1)I_{n-2} \leqslant (2n-1)I_{n-2}$ puis $I_n \sim \dfrac{1}{n\sqrt{2}}$

Exercice 87 *[sujet]* **1.** $\dfrac{1}{\operatorname{ch}^n}$ est $\mathcal{CM}^0$ sur $[0,x]$ (ou $[x,0]$)

2. Par TCD (sur $[0,x]$), $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n(x)=0$ car $\left|\dfrac{1}{\operatorname{ch}^n t}\right|\leqslant 1$; la CV est uniforme car $\|I_n\|_\infty=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{\operatorname{ch}^n t}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ par TCD avec $\left|\dfrac{1}{\operatorname{ch}^n t}\right|\leqslant\dfrac{1}{\operatorname{ch} t}$ pour $n\geqslant 1$

3. $I_{n+2}(x)=\displaystyle\int_0^x\frac{\operatorname{ch}^2 t-\operatorname{sh}^2 t}{\operatorname{ch}^{n+2} t}\,\mathrm{d}t\overset{\text{IPP}}{=}I_n(x)-\left[\operatorname{sh} t\frac{-1}{(n+1)\operatorname{ch}^{n+1} t}\right]_0^x-\frac{1}{n+1}I_n(x)$

4. $I=I_1(\ln 2)-I_3(\ln 2)$ puis I_1 se calcule en posant $u=e^x$

Exercice 88 *[sujet]* **1.** $\lim\limits_{x\to 0} f_n(x)=1$ et $f_n(x)\underset{x\to+\infty}{=}O\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$

2. $|f_n(x)|\leqslant\begin{cases}\dfrac{1}{x^2} & \text{si } x\geqslant 1\\ 1 & \text{si } x\in]0,1[\end{cases}$ car $|\sin(nx)|\leqslant nx$ donc $\lim u_n=\displaystyle\int_0^{+\infty}0\,\mathrm{d}t=0.$

Exercice 89 *[sujet]* **1.** (f_n) CVS vers 0

2. $\|f_n\|_{\infty,[a,1]}\leqslant\dfrac{1}{1+n^2a^2}$

3. Non car $f_n\left(\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{1}{2}e^{-1/n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\dfrac{1}{2}>0$

4. $\lim u_n=0$ par TCD avec $|f_n(x)|\leqslant 1$

Exercice 90 *[sujet]* **1.** (f_n) CS vers $e^{-t}\ln(t)$ (forme exponentielle et DL)

2. $|f_n(t)|\leqslant|\ln(t)|e^{-(n-1)\frac{t}{n}}\leqslant|\ln(t)|e^{-t/2}$ si $n\geqslant 2$

3. $\displaystyle\int_0^n f_n(t)\,\mathrm{d}t=n\ln(n)\int_0^1(1-u)^{n-1}\,\mathrm{d}u+n\int_0^1(1-u)^{n-1}\ln(u)\,\mathrm{d}u$ puis $n\ln(n)\displaystyle\int_0^1(1-u)^{n-1}\,\mathrm{d}u=\ln(n)$ et $n\displaystyle\int_0^1(1-u)^{n-1}\ln(u)\,\mathrm{d}u\overset{\text{IPP}}{=}-\int_0^1\frac{(1-u)^n-1}{u}\,\mathrm{d}u=-\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^1(1-u)^k\,\mathrm{d}u=-H_n.$

Exercice 91 *[sujet]* **1.** (f_n) CS sur $\mathbb{R}^+$ vers $x\mapsto e^{-x}\sin(x)$

2. $\lim v_n=\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-x}\sin(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$ par TCD avec $|f_n(x)|\leqslant e^{-x}|\sin x|\leqslant e^{-x}$

3. a) $x\mapsto\ln(1+x)-x$ croît sur $]-1,0]$ et décroît sur $\mathbb{R}^+$

b) Si $x\in[0,n]$, $|f_n(x)-f(x)|\leqslant e^{-x}-e^{n\ln(1-x/n)}\leqslant 1-e^{x+n\ln(1-x/n)}$ donc $|f_n(x)-f(x)|\leqslant 1-e^{n^{1/4}+n\ln(1-n^{-3/4})}$ sur $[0,n^{1/4}]$. Si $x\geqslant n^{1/4}$ alors $|f_n(x)-f(x)|\leqslant 2e^{-x}\leqslant 2e^{-n^{1/4}}$. En regroupant les deux, on a $\|f_n-f\|_\infty\leqslant 2e^{-n^{1/4}}+\left(1-e^{n^{1/4}+n\ln(1-n^{-3/4})}\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$

Exercice 92 *[sujet]* On pose $f_n(x)=\begin{cases}\left(1-\dfrac{x}{n}\right)^n\cos(x) & \text{si } x\in[0,n]\\ 0 & \text{si } x>n\end{cases}$ et on applique le TCD : si n est grand, $f_n(x)=\left(1-\dfrac{x}{n}\right)^n\cos(x)\xrightarrow[n\to+\infty]{}e^{-x}\cos(x)$ et $|f_n(x)|\leqslant e^{-x}|\cos(x)|\leqslant e^{-x}$ par concavité de ln. On en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-x}\cos(x)\,\mathrm{d}x=\operatorname{Re}\left(\int_0^{+\infty}e^{-(1-i)x}\,\mathrm{d}x\right)=\operatorname{Re}\left(\frac{1}{1-i}\right)=\frac{1}{2}$

Exercice 93 *[sujet]* **1.** cours

2. $\lim\limits_{x\to 0} f_n(x)=1$

3. $\lim I_n=\displaystyle\int_0^1\frac{e^x-1}{x}\,\mathrm{d}x$ par TCD avec $|f_n(x)|\leqslant\dfrac{e^x-1}{x}$ et $\dfrac{e^x-1}{x}\xrightarrow[x\to 0]{}1$. Puis, pour $x\in]0,1]$, $\dfrac{e^x-1}{x}=\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^{k-1}}{k!}$ et on intègre terme à terme avec le TITT ou CVN sur $[0,1]$ car $\left|\dfrac{x^{k-1}}{k!}\right|\leqslant\dfrac{1}{k!}$

Exercice 94 *[sujet]* **1.** f_0 n'est pas $\mathcal{CM}^0$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ car $\lim\limits_{t\to\frac{3\pi}{2}^-}f_0(t)=+\infty$; $f_n(t)\underset{t\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{t^{n-1}}$ n'est intégrable sur $[1,+\infty[$ que pour $n\geqslant 3$ (et l'intégrale DV si f_n n'est pas intégrable car $f_n\geqslant 0$ au voisinage de $+\infty$). Enfin $\lim\limits_0 f_n=1$ si $n\geqslant 3$.

2. $I=\displaystyle\int_0^1\frac{t}{\sin(t)}\,\mathrm{d}t$ par $|f_n(t)|\leqslant\begin{cases}\dfrac{t}{t^3-1} & \text{si } t\geqslant 1\\ \dfrac{t}{\sin(t)} & \text{si } t\in]0,1[\end{cases}$

3. $n(I_n - I) \overset{u=t^n}{=} \int_1^{+\infty} \frac{u^{2/n-1}}{u+\sin(u^{1/n})}\,\mathrm{d}u - \int_0^1 \frac{u^{1/n}}{\sin(u^{1/n})(u+\sin(u^{1/n}))}\,\mathrm{d}u$ puis par $\left|\frac{u^{2/n-1}}{u+\sin(u^{1/n})}\right| \leqslant \frac{u^{2/3-1}}{u-1)}$, on a $\lim_{n\to+\infty} \int_1^{+\infty} \frac{u^{2/n-1}}{u+\sin(u^{1/n})}\,\mathrm{d}u = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u(u+\sin(1))}$ et $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{u^{1/n}}{\sin(u^{1/n})(u+\sin(u^{1/n}))}\,\mathrm{d}u = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sin(1)(u+\sin(1))}$ par $\left|\frac{u^{1/n}}{\sin(u^{1/n})(u+\sin(u^{1/n}))}\right| \leqslant \frac{1}{\sin(u^{1/3})(u+\sin(u^{1/3}))}$ puisque sin est croissante sur $[0,1]$.

Exercice 95 *[sujet]* On pose $u = t^n$: $nu_n = \int_0^1 u^{1/n} f(u^{1/n})\,\mathrm{d}u \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 1 f(1)\,\mathrm{d}u = f(1)$ par TCD et continuité de f en 1 avec $\left|u^{1/n} f(u^{1/n})\right| \leqslant \|f\|_\infty$ car f est continue sur le segment $[0,1]$ donc bornée.

Exercice 96 *[sujet]* $n\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t \overset{u=t^n}{=} \int_0^1 u^{1/n} f(u^{1/n})\,\mathrm{d}u \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(1=)\,\mathrm{d}u = f(1)$ car $|u^{1/n} f(u^{1/n})| \leqslant \|f\|_\infty$.

Exercice 97 *[sujet]* On complète par 0 sur $]n,+\infty[$ puis $\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \frac{x+1}{x^n e^x + x^2 + x + 1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x+1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$ car

$$|f_n(x)| \leqslant \begin{cases} \dfrac{x+1}{x^2+x+1} & \text{si } x \leqslant 1 \\ \dfrac{x+1}{e^x + x^2 + x + 1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Exercice 98 *[sujet]* On a $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{x^n}{x^{n+2}+1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ car $\left|\frac{x^n}{x^{n+2}+1}\right| \leqslant \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1] \\ \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Exercice 99 *[sujet]* $\lim u_n = 0$ car $|\exp(-x^n)| \leqslant e^{-x}$ puis $u_n \overset{u=x^n}{=} \frac{1}{n}\int_1^{+\infty} e^{-u} u^{1/n-1}\,\mathrm{d}u$ donc $nu_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u = C > 0$ car $\left|e^{-u} u^{1/n-1}\right| \leqslant e^{-u}$ donc $u_n \sim \frac{C}{n}$ (positif) et $\sum u_n$ DV.

Exercice 100 *[sujet]* **1.** $\frac{1-\cos^n x}{x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{n}{2}$ et $\frac{1-\cos^n x}{x^2} \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

2. on pose $x = \sqrt{\frac{2t}{n}}$

3. $\lim_0 \frac{\ln(\cos t)}{t^2} = -\frac{1}{2}$

4. on trouve la limite de (v_n) par TCD : si $f_n(t) = \frac{1-\cos^n\left(\sqrt{\frac{2t}{n}}\right)}{t\sqrt{t}}$, on a $\lim_{n\to+\infty} f_n(t) = \frac{1-e^{-t}}{t\sqrt{t}}$. Reste la domination : si $t \geqslant 1$ alors $|f_n(t)| \leqslant \frac{2}{t\sqrt{t}}$; si $t < 1$ alors $\sqrt{\frac{2t}{n}} \in \left[0, \sqrt{\frac{2}{n}}\right] \subset [0,\alpha]$ si $n \geqslant n_0$ (n_0 ne dépend pas de t) et $\cos^n\left(\sqrt{\frac{2t}{n}}\right) = \exp\left[n \ln\cos\left(\sqrt{\frac{2t}{n}}\right)\right] \geqslant \exp\left[-2n\frac{2t}{n}\right] = e^{-4t}$. On a donc $|f_n(t)| = f_n(t) \leqslant \frac{1-e^{-4t}}{t\sqrt{t}}$ sur $]0,1]$ si $n \geqslant n_0$.
On a donc $\lim_{n\to+\infty} v_n = \int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-x}}{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \overset{\text{IPP}}{=} \frac{2}{3}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \overset{x=t^2}{=} \frac{2}{3}\sqrt{\pi}$. Au final, $u_n \sim \frac{\sqrt{\pi n}}{3\sqrt{2}}$

Exercice 101 *[sujet]* **1.** cours

2. il suffit que $\cos(\varphi_n) = \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}$ et $\sin(\varphi_n) = -\frac{b_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}$ donc φ_n est un argument du complexe $a_n - ib_n$ (qui est non nul)

3. On a $I_n = (a_n^2+b_n^2)\left(\frac{d-c}{2} + \left[\frac{\sin(2nx+2\varphi_n)}{4n}\right]_c^d\right)$ donc $\lim I_n = \frac{(d-c)(a_n^2+b_n^2)}{2}$ ce qui donnera la minoration à partir d'un certain rang ($1/2 > 1/4$!)

4. Si (a_n) ou (b_n) ne tend pas vers 0, la minoration précédente prouve que (I_n) ne tend pas vers 0, ce qui est absurde car $|a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)| \leqslant K$ (car (a_n) et (b_n) sont bornée) donc le TCD donne $\lim I_n = 0$.

Exercice 102 *[sujet]* Proche des intégrales de Wallis

1. CSSA avec $0 \leqslant a_n \leqslant \int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}$

2. $a_{n+2} \overset{\text{IPP}}{=} \dfrac{2}{3}(n+1)\displaystyle\int_0^1 t^n(1-t^2)^{3/2}\,\mathrm{d}t = \dfrac{2}{3}(n+1)(a_n - a_{n+2})$

3. On prouve $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-t^2}}{1+t}\,dt$ en utilisant le TCD appliqué à $S_n(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\sqrt{1-t^2}t^k$ car le TITT est plus difficile à appliquer (la CVA de $\sum a_n$ n'est pas évidente) : on a $|S_n(t)| = \sqrt{1-t^2}\left|\dfrac{1-(-1)^{n+1}t^{n+1}}{1+t}\right| \leqslant \dfrac{2\sqrt{1-t^2}}{1+t}$ ce qui permettra de conclure

Exercice 103 *[sujet]* Si $x > 0$, on a $\dfrac{x}{\mathrm{ch}(x)} = 2\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x e^{-(2n+1)x}$ puis TITT avec $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left|xe^{-(2n+1)x}\right|\,\mathrm{d}x = \frac{1}{(2n+1)^2}$

Exercice 104 *[sujet]* **1.** $n^{-n} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$ si $n \geqslant 2$ et $\displaystyle\lim_0 e^{x\ln(x)} = 1$

2. IPP successives $\in_0^1 f_{n,p}(t)\,\mathrm{d}t = (-1)^n\dfrac{n!}{(p+1)^n}$

3. TITT avec $e^{x\ln(x)} = \displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{x^n(\ln x)^n}{n!}$

Exercice 105 *[sujet]* $t^{t^x} = \displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{(t^x\ln t)^n}{n!}$ et on applique le TITT avec $\displaystyle\int_0^1\frac{|t^x\ln t|^n}{n!}\,\mathrm{d}t = (-1)^n\int_0^1\frac{(t^x\ln t)^n}{n!}\,\mathrm{d}t \overset{\text{IPP}}{=} (-1)^{n+1}\frac{1}{(n-1)!(xn+1)}\int_0^1 t^{xn}(\ln t)^{n-1}\,\mathrm{d}t = \cdots = \frac{1}{(xn+1)^{n+1}}$

Exercice 106 *[sujet]* **1.** cours

2. Pour n fixé, $\ln(1+t^n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} g_k(t)$ avec $g_k(t) = (-1)^{k+1}\dfrac{t^{nk}}{k}$ et TITT avec $\displaystyle\int_0^1 |g_k(t)|\,\mathrm{d}t = \frac{1}{(k+1)(nk+1)} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{nk^2}$

3. Par CVNTS de $]-,1,1[$: $\|f_k'\|_{\infty,[-a,a]} \leqslant \dfrac{1}{k(k-a)^2}$ pour $k \geqslant a$.

4. $u_n = \dfrac{1}{n}f\left(\dfrac{1}{n}\right)$ et $f\left(\dfrac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(0) = \dfrac{\pi^2}{12} \neq 0$.

5. Par $\mathrm{DL}_1(0)$ de f (Taylor-Young) : $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = f(0) + \dfrac{1}{n}f'(0) + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ et $c = f'(0) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k^3}$

Exercice 107 *[sujet]* Par TCD avec $S_n(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} t^{b-1}(-1)^k t^{ka}$ et $|S_n(t)| = t^{b-1}\dfrac{1-(-1)^{n+1}t^{(n+1)a}}{1+t^a} \leqslant \dfrac{2t^{b-1}}{1+t^a}$

Exercice 108 *[sujet]* $\displaystyle\int_0^1 x^{2n}(1-x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}$ et par TITT la somme de la série vaut aussi $\displaystyle\int_0^1\frac{1-x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(2)$.

Exercice 109 *[sujet]* **1.** $(\sin(px))$ est bornée donc $R \geqslant 1$ puis, si $|t| < 1$, $S_x(t) = \mathrm{Im}\left(\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} t^{p-1}e^{ipx}\right) = \mathrm{Im}\left(\dfrac{e^{ix}}{1-te^{ix}}\right) = \dfrac{\sin x}{1-2t\cos x + t^2}$

2. $|\cos x| < 1$ donc S_x est continue sur $[0,\pi]$ et $\displaystyle\int_0^1 S_x(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sin x}\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1+\left(\frac{t-\cos x}{\sin x}\right)^2} = \left[\arctan\left(\frac{t-\cos x}{\sin x}\right)\right]_{t=0}^{t=1} = \arctan\frac{2\sin^2 x/2}{2\sin x/2\cos x/2} + \arctan\frac{\cos x}{\sin x} = \frac{x}{2} + \arctan\frac{\sin(\pi/2-x)}{\cos(\pi/2-x)} = \frac{\pi - x}{2}$

3. On remarque $\dfrac{\sin(px)}{p} = \displaystyle\int_0^1 t^{p-1}\sin(px)\,\mathrm{d}t$ mais le TITT ne s'applique pas (car la série à trouver n'est en fait pas ACV) donc on applique le TCD à la suite des sommes partielles de S_x : on pose $T_n(t) = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} t^{p-1}\sin(px)$, on a $\displaystyle\int_0^1 T_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{p=1}^{n}\frac{\sin(px)}{p}$, puis $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} T_n(t) = S_x(t)$ si $t \in [0,1[$ et $|T_n(t)| = \left|\mathrm{Im}\left(\displaystyle\sum_{p=1}^{n} t^{p-1}e^{ipx}\right)\right| =$

$\left|\operatorname{Im}\left(\dfrac{e^{ix}(1-t^pe^{ipx})}{1-te^{ix}}\right)\right| \leqslant \dfrac{1+t}{\sqrt{1-2t\cos x+t^2}}$ qui est intégrable sur $[0,1]$ car continue sur ce segment. On déduit de tout cela $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{\sin(px)}{p} = \int_0^1 S_x(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi-x}{2}$

Exercice 110 *[sujet]* $\dfrac{t^{\alpha-1}}{1+t} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{t^{1-\alpha}}$ puis $\dfrac{t^{\alpha-1}}{1+t} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n t^{\alpha+n-1}$ si $t\in]0,x]$ et on applique le TITT ($x<1$ fixé) avec $\displaystyle\int_0^x \left|(-1)^n t^{\alpha+n-1}\right|\,\mathrm{d}t = \frac{x^{\alpha+n}}{\alpha+n}$. La dernière somme s'obtient avec $\alpha=\dfrac{1}{3}$ et $x=\dfrac{1}{2}$ (poser $u=t^{1/3}$ pour calculer l'intégrale)

Exercice 111 *[sujet]* **1.** $f(t)=\dfrac{\sqrt{t}}{e^t-1}\underset{0}{\sim}\dfrac{1}{\sqrt{t}}$ et $f(t)\underset{+\infty}{=}o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$

2. $f(t)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\sqrt{t}e^{-nt}$ puis TITT (chgt de variable pour le calcul des intégrales)

Exercice 112 *[sujet]* $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{e^x-1}=0$ et $\dfrac{x^2}{e^x-1}\underset{x\to+\infty}{=}o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ donc J existe. Pour $x>0$, $\dfrac{x^2}{e^x-1}=\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}x^2e^{-nx}$ puis on applique le TITT avec $f_n(x)=x^2e^{-nx}\geqslant 0$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty}f_n(x)\,\mathrm{d}x=\frac{2}{n^3}$ par deux IPP.

Exercice 113 *[sujet]* **1.** $\dfrac{x}{\operatorname{sh}x}\xrightarrow[x\to 0]{}1$ et $\dfrac{x}{\operatorname{sh}x}\underset{+\infty}{\sim}2xe^{-x}=o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$

2. $\dfrac{x}{\operatorname{sh}x}=\dfrac{2xe^{-x}}{1-e^{-2x}}\overset{x\geq 0}{=}2\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}xe^{-(2n+1)x}\,\mathrm{d}x$ puis TITT (H4) $\displaystyle\int_0^{+\infty}|f_n(x)|\,\mathrm{d}x\overset{\text{IPP}}{=}\frac{2}{(2n+1)^2}$

Exercice 114 *[sujet]* **1.** Fait en cours : $D_\Gamma=\mathbb{R}^{+*}$

2. cours

3. pour $x>0$ fixé et $t>0$, on a $|e^{-t}|<1$ donc $\dfrac{t^xe^{-t}}{1-e^{-t}}=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}t^xe^{-(n+1)t}$ puis TITT avec $\displaystyle\int_0^{+\infty}|t^xe^{-(n+1)t}|\,\mathrm{d}t\overset{u=(n+1)t}{=}\frac{\Gamma(x+1)}{(n+1)^{x+1}}$ et $x+1>1$ donc $\displaystyle\sum\frac{1}{(n+1)^{x+1}}$ CV

Exercice 115 *[sujet]* **1.** $\dfrac{\sin t}{\operatorname{sh}t}\xrightarrow[t\to 0]{}1$ et $\dfrac{\sin t}{\operatorname{sh}t}\underset{t\to+\infty}{=}O(e^{-t})$

2. Si $t>0$, $|e^{-2t}|<1$ donc $\dfrac{\sin t}{\operatorname{sh}t}=2\dfrac{\sin t}{e^t-e^{-t}}=2\sin(t)e^{-t}\dfrac{1}{1-e^{-2t}}=\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}2\sin(t)e^{-(2n+1)t}$

3. TITT avec $\displaystyle\int_0^{+\infty}|\sin(t)e^{-(2n+1)t}|\,\mathrm{d}t\leqslant\int_0^{+\infty}te^{-(2n+1)t}\,\mathrm{d}t\overset{\text{IPP}}{=}\frac{1}{(2n+1)^2}$ et, pour la conclusion, $\displaystyle\int_0^{+\infty}\sin(t)e^{-(2n+1)t}\,\mathrm{d}t=\operatorname{Im}\left(\int_0^{+\infty}e^{-(2n+1-i)t}\,\mathrm{d}t\right)=\operatorname{Im}\frac{1}{2n+1-i}$

4. si $n\in\mathbb{N}$, $\dfrac{1}{(2n+1)^2+1}\leqslant\displaystyle\int_n^{n+1}\frac{2\,\mathrm{d}t}{(2t+1)^2+1}\leqslant\frac{1}{(2n+3)^2+1}$ et $t\mapsto\dfrac{1}{(2t+1)^2+1}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ donc en sommant, pour $n\in\mathbb{N}$, on trouve $I\leqslant\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{2\,\mathrm{d}t}{(2t+1)^2+1}\leqslant I-1$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{2\,\mathrm{d}t}{(2t+1)^2+1}=\Big[\arctan(2t+1)\Big]_0^{+\infty}=\frac{\pi}{4}$

Exercice 116 *[sujet]* Pour l'intégrabilité, $\dfrac{\sin t}{e^t-1}\xrightarrow[t\to 0]{}1$ et $\dfrac{\sin t}{e^t-1}\underset{+\infty}{=}o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.

Puis $S(t)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\sin(t)e^{-nt}$ donc $\displaystyle\int_0^{+\infty}|f_n(t)|\,\mathrm{d}t\leqslant\int_0^{+\infty}te^{-nt}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{n^2}$ donc on a le résultat par TITT avec $\displaystyle\int_0^{+\infty}f_n(t)\,\mathrm{d}t=\operatorname{Im}\left(\int_0^{+\infty}e^{-(n-i)t}\,\mathrm{d}t\right)=\frac{1}{n^2+1}$

Exercice 117 *[sujet]* **1.** $\dfrac{\ln(1-t^2)\ln(t)}{t^2}\underset{t\to 0}{\sim}-\ln(t)$ et $\dfrac{\ln(1-t^2)\ln(t)}{t^2}\xrightarrow[t\to 1]{}0$ donc I existe.

2. On applique le TITT avec $\dfrac{\ln(1-t^2)\ln(t)}{t^2} = -\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{2n-2}\ln(t)}{n}$ pour $t \in]0,1[$ et $\displaystyle\int_0^1 t^{2n-2}\ln(t)\,\mathrm{d}t \overset{\text{IPP}}{=} \frac{1}{(2n-1)^2}$.

Pour le calcul, comme $\dfrac{1}{n(2n-1)^2} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{2}{2n-1} + \dfrac{2}{(2n-1)^2}$, on trouve $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(2k-1)^2} = 2H_n - 2H_{2n} + 2\left(\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k)^2}\right)$ $\dfrac{\pi^2}{4} - 2\ln(2)$ en utilisant $H_n = \ln(n) + \gamma + 0(1)$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 118 *[sujet]* **1.** On vérifie $a_n = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ donc $\sum a_n$ CV, (b_n) CV vers l donc $n^\alpha \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda = e^l > 0$.

2. a) $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{1-(1-t)^x}{t} = x$ et $\dfrac{1-(1-t)^x}{t} \underset{t\to 1}{\sim} \dfrac{-1}{(1-t)^{-x}}$

b) Pour $t \in]0,1[$, $(1-t)^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!}t^n$ donc $\dfrac{1-(1-t)^x}{t} = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!}t^{n-1}$ puis on applique le TITT avec $u_n = \displaystyle\int_0^1 |f_n(t)|\,\mathrm{d}t = \frac{(-x)(1-x)\dots(n-x-1)}{n\times n!}$ donc $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{x+2}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ donc $u_n \sim \dfrac{\lambda}{n^{x+2}}$ et $x+2>1$.

Exercice 119 *[sujet]* **1.** $\dfrac{\sin\alpha x}{e^x-1} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{e^x-1} = \alpha$

2. $\dfrac{\sin\alpha x}{e^x-1} = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\sin\alpha x e^{-nx}$ si $x>0$ puis TITT avec $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left|\sin\alpha x e^{-nx}\right|\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{+\infty}|\alpha| x e^{-nx}\,\mathrm{d}x = \frac{|\alpha|}{n^2}$ et enfin on calcule $\displaystyle\int_0^{+\infty}\sin\alpha x e^{-nx}\,\mathrm{d}x = \mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty} e^{-(n-i\alpha)x}\,\mathrm{d}x\right) = \frac{\alpha}{n^2+\alpha^2}$

3. Par comparaison à une intégrale I équivaut à $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\alpha\,\mathrm{d}t}{\alpha^2+t^2}$ quand α tend vers $+\infty$ puis $\displaystyle\lim_{\alpha\to+\infty} I(\alpha) = \frac{\pi}{2}$

Exercice 120 *[sujet]* On commence par montrer que $S(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{-nt}}{\sqrt{n}}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ (TITT H2) par CVNTS de $\mathbb{R}^{+*}$ avec $\|f_n\|_{\infty,[a,b]} \leqslant f_n(a) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

On applique ensuite le TITT avec $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n^{3/2}}$

Exercice 121 *[sujet]* **1.** $|f_n(x)| \leqslant |a_n|\dfrac{b^n}{n!}e^{-a} \underset{n\to+\infty}{=} o(|a_n|)$ donc CN sur tout segment de $\mathbb{R}^+$

2. Par TITT avec $\displaystyle\int_0^{+\infty}|f_n(t)|\,\mathrm{d}t \overset{\text{IPP}}{=} |a_n|$, on trouve $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$

Exercice 122 *[sujet]* **1.** $\mathcal{CM}^0$ sur $\mathbb{R}^+$ et $o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ en $+\infty$

2. Le TITT ne s'applique pas car la série à trouver n'est pas ACV. $f(t) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\cos(t)e^{-(k+1)t}$ puis $\displaystyle\int_0^{+\infty}\cos(t)e^{-(k+1)t}\,\mathrm{d}t = \frac{(k+1)}{1+(k+1)^2}$ et on termine avec le TCD : $|S_n(t)| = \left|\dfrac{\cos(t)(1-(-1)^{n+1}e^{-(n+1)t}}{1+e^t}\right| \leqslant \dfrac{2|\cos(t)|}{1+e^t}$

Exercice 123 *[sujet]* **1.** CV par CSSA mais pas ACV car $\dfrac{2n+1}{(2n+1)^2+x^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n}$

2. On applique le TCD à $S_n(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k e^{-(2k+1)t}\cos(xt) = e^{-t}\frac{1-(-1)^{n+1}e^{-(2n+2)t}}{1+e^{-2t}}\cos(xt)$ donc $|S_n(t)| \leqslant \dfrac{2e^{-t}}{1+e^{-2t}}$ intégrable sur $\mathbb{R}^+$. On termine avec $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-(2k+1)t}\cos(xt)\,\mathrm{d}t = \frac{2k+1}{(2k+1)^2+x^2}$.

Exercice 124 *[sujet]* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = \int_0^{\pi/2} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cos^k(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{1+\cos t}$ par TCD en utilisant la majoration $\displaystyle|S_n(t)| = \left|\frac{1-(-1)^{n+1}\cos(n+1)t}{1+\cos t}\right| \leqslant \frac{2}{1+\cos t}$. On trouve $\displaystyle S = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{2\cos^2 t/2} = \left[\tan\frac{t}{2}\right]_0^{\pi/2} = 1$

Exercice 125 *[sujet]* **1.** $\displaystyle\frac{(\ln t)^2}{1+t^2} \underset{t\to 0}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ donc l'intégrale de gauche CV et vaut celle de droite par $u = \dfrac{1}{t}$.

2. Si $t \in]0,1[$ alors $\displaystyle\frac{(\ln t)^2}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (\ln t)^2 t^{2n}$ puis TITT avec $\displaystyle\int_0^1 \left|(-1)^n (\ln t)^2 t^{2n}\right|\,\mathrm{d}t \overset{\text{IPP}}{=} \frac{2}{(2n+1)^3}$

Exercice 126 *[sujet]* **1.** $\lim_0 f = 0$ et $\lim_1 f = 1$

2. si $t \in]0,1[$, $\displaystyle f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} n t^n (\ln t)^2$ puis TITT avec $\displaystyle\int_0^1 |f_n(t)|\,\mathrm{d}t = n\int_0^1 t^n (\ln t)^2\,\mathrm{d}t \overset{2\ \text{IPP}}{=} \frac{2n}{(n+1)^3}$. On a donc $\displaystyle I = 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)^3} = 2\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^3}\right)$

Exercice 127 *[sujet]* **1.** $\displaystyle\|f_n\|_\infty \leqslant \frac{1}{n^2}$ donc CN sur $\mathbb{R}$ donc f est continue sur $\mathbb{R}$

2. Par CSSA $\displaystyle|f(x)| \leqslant \frac{1}{1+x^2}$ donc (avec la continuité précédente), f est intégrable sur $\mathbb{R}$. On applique le TCD à $\displaystyle R_n(t) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2+t^2}$: par CSSA, on a $\displaystyle|R_n(t)| \leqslant \frac{1}{(n+1)^2+x^2} \leqslant \frac{1}{1+x^2}$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} R_n(t)\,\mathrm{d}t = 0$ ce qui donne par linéarité de l'intégrale sur la somme partielle de la série (donc une somme finie) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}x}{n^2+x^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln(2)$

Exercice 128 *[sujet]* **1.** $\displaystyle F(t) = \frac{\sin(\pi t)}{1-t}$; pas de CU car $\displaystyle R_n(t) = \frac{t^{n+1}\sin(\pi t)}{1-t}$ donc $R_n(1-1/n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \pi e^{-1}$ donc $(\|R_n\|_\infty)$ ne tend pas vers 0

2. TITT avec $\displaystyle\int_0^1 |f_n(t)|\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t^n \sin(\pi t)\,\mathrm{d}t \overset{2\ \text{IPP}}{\leqslant} \frac{1}{(n+1)(n+2)}\left(2 + \int_0^1 t^{n+2}\sin(\pi t)\,\mathrm{d}t\right) \leqslant \frac{3}{(n+1)(n+2)}$; on en déduit $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\sin(\pi t)}{1-t} \overset{x=\pi(1-t)}{\mathrm{d}} t = \int_0^\pi \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 129 *[sujet]* **1.** $\displaystyle 0 \leqslant u_n \leqslant \pi \int_0^\pi x^n(1-x)\,\mathrm{d}x = \pi\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$

2. Par TITT avec $\displaystyle\int_0^\pi |x^n \sin(\pi x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \pi\frac{1}{(n+1)(n+2)}$ puis changement de variable $u = \pi x$.

Exercice 130 *[sujet]* $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{t-1}\,\mathrm{d}t \overset{\text{TITT}}{=} \sum_{n\geqslant 0} \int_0^1 -t^n \ln(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Exercice 131 *[sujet]*

— Si I CV alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k \overset{\text{somme finie}}{=} \int_0^1 f(t)\frac{1-t^{n+1}}{1-t}\,\mathrm{d}t$ et comme $f \geqslant 0$, $\displaystyle f(t)\frac{1-t^{n+1}}{1-t} \leqslant \frac{f(t)}{1-t}$ donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k \leqslant I$ donc la série CV (SATP dont les somme partielles sont majorées)

— Si $\sum u_n$ CV alors $\displaystyle\int_0^x \frac{f(t)}{1-t}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} f(t)t^n\,\mathrm{d}t$ que l'on peut intégrer terme à terme sur le segment $[0,x]$ si $|x| < 1$ par CVN car $|f(t)t^n| \leqslant \|f\|_\infty x^n$. On a donc $\displaystyle\int_0^x \frac{f(t)}{1-t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x f(t)t^n\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ (car $f \geqslant 0$) donc I CV (intégrale d'une fonction positive dont une primitive est majorée)

En cas de CV, on a $\displaystyle I = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ par TITT (et H4 est la CV de $\sum u_n$ car $f \geqslant 0$).