TD11 : Suites et séries de fonctions

Exercice 1 (CCINP PSI 2024)
Pour $x \in [0,1]$ et $n \geqslant 0$, on pose $f_n(x) = \sin\left(nxe^{-nx^2}\right)$.

1. Étudier la convergence simple de (f_n) sur $[0,1]$
2. Étudier la convergence uniforme de (f_n) sur $[a,1]$, avec $a \in]0,1]$, puis sur $[0,1]$

Exercice 2 (CCINP PSI 2022)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et g_n définie sur $[0,1]$ par $g_n(t) = e^t\left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n$.

1. Montrer que pour tout réel $t \in [0,1]$, $|g_n'(t)| \leqslant \dfrac{e^t}{n}$ puis que $\left|1 - e^t\left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n\right| \leqslant \dfrac{te^t}{n}$.
2. Étudier la convergence uniforme sur $[0,1]$ de la suite de fonctions $I_n(x) = \displaystyle\int_0^x e^t\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \mathrm{d}t$.

Exercice 3 (Mines-Ponts PSI 2019)

1. Convergence simple puis uniforme sur $[0,1]$ de la suite $f_n(x) = n^\alpha x(1-x)^n$
2. Convergence simple puis uniforme de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$. *(*)*

Exercice 4 (CCP PSI 2018)
On note $f_n(x) = e^{-x\sqrt{n}}$ et $f(x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$.

1. Donner l'ensemble de définition D de f.
2. Pour $a > 0$, montrer la convergence normale sur $[a, +\infty[$ puis étudier la convergence normale sur D.
3. f est-elle continue sur D ? Déterminer sa limite en $+\infty$.
4. Montrer que $\displaystyle\int_n^{n+1} e^{-x\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \leqslant e^{-x\sqrt{n}} \leqslant \int_{n-1}^{n} e^{-x\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ et en déduire que $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{2}{x^2}$.

Exercice 5 (Mines-Ponts PSI 2018)

1. Déterminer le domaine de définition D de $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+nx}$ et montrer que f est continue sur D.
2. Calculer $l = \displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$ puis déterminer un équivalent de $f(x) - l$ en $+\infty$.

Exercice 6 (Mines-Télécom PSI 2024)
Pour $n \geqslant 2$, on pose $f_n(x) = \dfrac{xe^{-nx}}{\ln n}$ et $S(x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 2} f_n(x)$

1. Déterminer le domaine de définition D_S de S.
2. La série converge-t-elle normalement sur D_S ?
3. Montrer que S est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.
4. Montrer que S est continue en 0. *(*)*

Exercice 7 (Centrale PSI 2023)
Pour $x \in [0,1]$, on définit g sur $[0,1]$ par $\forall y \in [0,1], g(y) = y - \dfrac{x}{2}y^2$

1. Montrer que g est 1-lipschitzienne et que $[0,1]$ est stable par g
2. On définit la suite de fonctions $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $h_0 = 1$ et $\forall x \in [0,1], \forall n \in \mathbb{N}, h_{n+1}(x) = h_n\left(\dfrac{x}{2}\right) - \dfrac{x}{2}h_n\left(\dfrac{x}{2}\right)^2$
   a) Montrer que $\forall x \in [0,1], h_n(x) \in [0,1]$
   b) Montrer que $|h_{n+1}(x) - h_n(x)| \leqslant \left|h_n\left(\dfrac{x}{2}\right) - h_{n-1}\left(\dfrac{x}{2}\right)\right|$
   c) En déduire que $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,1]$. *(*)*
3. Justifier qu'il existe une fonction f continue sur $[0,1]$, telle que $f(0) = 1$ et $\forall x \in [0,1], f(x) = f\left(\dfrac{x}{2}\right) - \dfrac{x}{2}f\left(\dfrac{x}{2}\right)^2$

Indications

Exercice 2

2. *Il n'est pas indispensable de commencer par la CVS si on arrive à deviner la valeur de la limite simple.*

Exercice 3

2. *Commencer par la CVN, puis dans le « cas limite », on peut calculer la somme de la série.*

Exercice 6

4. *CVU sur* $\mathbb{R}^+$

Exercice 7

2.*c) Prouver* $|h_{n+1}(x) - h_n(x)| \leqslant \left| h_1\left(\frac{x}{2^n}\right) - h_0\left(\frac{x}{2^n}\right) \right|$ *; pour la CVU, utiliser* $f - h_n = \sum_{k=n}^{+\infty} (h_{k+1} - h_k)$