

Théorème de décomposition de Dunford

On admet le théorème suivant que l'on pourra utiliser librement :

Si A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que son polynôme caractéristique χ_A soit scindé sur $\mathbb{K}$, alors il existe un unique couple (D, N) de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant les quatre propriétés :

1. $A = D + N$;
2. D est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (pas nécessairement diagonale) ;
3. N est nilpotente ;
4. $DN = ND$.

De plus, D et N sont des polynômes en A et $\mathcal{X}_A = \mathcal{X}_D$.

Le couple (D, N) s'appelle la décomposition de Dunford de A .

I Quelques exemples

1. Donner le couple de la décomposition de Dunford d'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ lorsque A est diagonalisable, puis lorsque la matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente.

Justifier qu'une matrice trigonalisable vérifie l'hypothèse du théorème, admettant ainsi une décomposition de Dunford.

Le couple de matrices $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$ est-il la décomposition de Dunford de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$?

2. Donner un exemple d'une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ n'admettant pas de décomposition de Dunford dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

3. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$.

Calculer son polynôme caractéristique $\mathcal{X}_A$, puis donner le couple (D, N) de la décomposition de Dunford de A (on utilisera le fait que $\mathcal{X}_A = \mathcal{X}_D$).

4. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A^2(A - I_n) = 0$.

Justifier que le polynôme $X(X - 1)$ est annulateur de la matrice A^2 .

Démontrer que le couple (D, N) de la décomposition de Dunford de la matrice A est donné par : $D = A^2$ et $N = A - A^2$.

II Un exemple par deux méthodes

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

On note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice A .

On notera id l'application identité de $\mathbb{R}^3$.

1. La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

Démontrer qu'on a la somme directe : $\mathbb{R}^3 = \ker(u - id) \oplus \ker(u - 2id)^2$.

2. Déterminer une base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ telle que :

$\ker(u - id) = \text{Vect}(e_1)$, $\ker(u - 2id) = \text{Vect}(e_2)$ et $\ker(u - 2id)^2 = \text{Vect}(e_2, e_3)$.

Écrire la matrice B de u dans la base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$.

3. Déterminer le couple de la décomposition de Dunford de la matrice B et en déduire le couple (on calculera ces matrices) de la décomposition de Dunford de la matrice A .

4. Décomposer en éléments simples la fraction $\frac{1}{(X - 1)(X - 2)^2}$ et en déduire deux polynômes U et V tels que :

$$(X - 1)U(X) + (X - 2)^2V(X) = 1 \text{ avec } \deg(U) < 2 \text{ et } \deg(V) < 1$$

5. On pose les endomorphismes : $p = V(u) \circ (u - 2\text{id})^2$ et $q = U(u) \circ (u - \text{id})$.
Calculer $p(x) + q(x)$ pour tout x vecteur de $\mathbb{R}^3$.
Démontrer que p est le projecteur sur $\ker(u - \text{id})$ parallèlement à $\ker(u - 2\text{id})^2$ et q est le projecteur sur $\ker(u - 2\text{id})^2$ parallèlement à $\ker(u - \text{id})$.
6. On pose $d = p + 2q$. Écrire la matrice de d dans la base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ (de la question II.2).
Déterminer le couple de la décomposition de Dunford de la matrice A en exprimant D et N comme polynômes de la matrice A (sous forme développée).

III Une preuve de l'unicité de la décomposition

1. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n . Soient u et v deux endomorphismes diagonalisables de E qui commutent. On note $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres de u et pour tout $1 \leq i \leq p$, $E_{\lambda_i}(u)$ le sous-espace propre de u associé à la valeur propre λ_i .
Démontrer que tout sous-espace propre de u est stable par v .
En déduire qu'il existe une base commune de diagonalisation pour u et v .
Pour tout $1 \leq i \leq p$, on pourra noter v_i l'endomorphisme induit par v sur $E_{\lambda_i}(u)$.
2. Soient A et B deux matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent. Démontrer que la matrice $A - B$ est diagonalisable.
3. Soient A et B deux matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent, démontrer que la matrice $A - B$ est nilpotente.
4. Déterminer les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui sont à la fois diagonalisables et nilpotentes.
5. Dans cette question, on admet, pour toute matrice carrée A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ à polynôme caractéristique scindé, l'existence d'un couple (D, N) vérifiant les conditions (1), (2), (3), (4) et tel que D et N soient des polynômes en A .
Établir l'unicité du couple (D, N) dans la décomposition de Dunford.