Correction du DM8

(Extrait de CCINP MP 2021 maths 2)

Partie I :

1. Si A est diagonalisable, le couple est $\boxed{D = A \text{ et } N = 0}$ alors que si A est nilpotente, le couple est $\boxed{D = 0 \text{ et } N = A}$
Si A est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors $\mathcal{X}_A$ est scindé dans $\mathbb{K}$ donc $\boxed{A \text{ admet une décompositon de Dunford}}$
On vérifie que $DN = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ alors que $ND = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc ce n'est pas la décomposition de Dunford de A. En fait, $\mathcal{X}_A = (X-1)(X-2)$ est SARS donc la décomposition de Dunford de A est $D = A$, $N = 0$.

2. Il suffit de trouver une matrice dont le polynôme caractéristique n'est pas scindé dans $\mathbb{R}$: par exemple $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ pour laquelle $\mathcal{X}_A = X^2 + 1$. Comme $\mathcal{X}_A = \mathcal{X}_D$ si la décomposition existait, on aurait $\mathcal{X}_D = X^2 + 1$ qui n'est pas scindé dans $\mathbb{R}$ donc D ne serait pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

3. On trouve $\boxed{\mathcal{X}_A = (X+1)^3}$ qui est bien scindé sur $\mathbb{R}$. Comme $\mathcal{X}_D = \mathcal{X}_A$ et que D est diagonalisable, on a $\boxed{D = P(-I_3)P^{-1} = -I_3 \text{ et } N = A - D = A + I_3}$ (qui est bien nilpotente d'après le théorème de Cayley-Hamilton).

4. $A^2(A^2 - I_3) = A^2(A - I_3)(A + I_3) = 0$. Comme $X(X-1)$ est SARS, A^2 est diagonalisable ; on vérifie aussi $N^2 = 0$, $A = N + D$ et $ND = DN$ car N et D sont des polynômes en A. Le couple $(A^2, A - A^2)$ est donc bien la décomposition de Dunford de A.

Partie II :

1. On vérifie $\mathcal{X}_A = (X-1)(X-2)^2$ et $\text{rg}(A - 2I_3) \neq 1$ donc $\dim(E_2(A)) \neq m_2(A)$ et $\boxed{A \text{ n'est pas diagonalisable}}$
On vérifie $E_1(A) = \text{Vect}\{(0,1,1)\}$, puis $(A - 2I_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\ker(A - 2I_3)^2 = \text{Vect}\{(1,1,0),(0,0,1)\}$
puis, si $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, on a $\det(P) = -1 \neq 0$ donc $((0,1,1),(1,1,0),(0,0,1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et on en déduit la décomposition $\boxed{\mathbb{R}^3 = \ker(A - I_3) \oplus \ker(A - 2I_3)^2}$

2. On prend $e_1 = (0,1,1)$, $e_2 = (1,1,0)$ et $e_3 = (0,0,1)$ par exemple et on obtient $\boxed{B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$ car on vérifie $u(e_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = e_2 + 2e_3$.

3. La décomposition de Dunford de B est $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (qui commutent bien) ; on en déduit celle de A : $A = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}P^{-1} + P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}$. Pour expliciter ces 2 matrices, on peut calculer P^{-1} ou utiliser que D et N doivent être des polynômes en A (et raisonner un peu comme à la question **I.4**) : on a $\mathcal{X}_A = (X-1)(X-2)^2$ donc si on pose $N = (A - I_3)(A - 2I_3)$, le théorème de Cayley-Hamilton donne N^2 ; on pose alors $D = A - N = -(A^2 - 4A + 2I_3)$ qui commute bien avec N. Reste à vérifier que D est diagonalisable : comme $\mathcal{X}_A = \mathcal{X}_D$, un polynôme annulateur de D SARS doit être $(X-1)(X-2)$: on calcule donc $(D - I_3)(D - 2I_3) = (A - 3I_3)(A - I_3)(A - 2I_3)^2 = 0$ donc D est bien diagonalisable.

4. $\dfrac{1}{(X-1)(X-2)^2} = \dfrac{1}{X-1} + \dfrac{-1}{X-2} + \dfrac{1}{(x-2)^2}$ et en réduisant au même dénominateur (et en identifiant les numérateurs), on trouve $1 = (X-2)^2 + (X-1)(3-X)$

5. Comme $(X-1)U(X) + (X-2)^2V(X) = 1$, on a $\boxed{p(x) + q(x) = x \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^3}$
Si $x \in \ker(u - 2id)^2$ alors $p(x) = V(u) \circ (u - 2id)^2(x) = 0$ et si $x \in \ker(u - id)$ alors $p(x) - x = q(x) = U(u) \circ (u - id)(x) = 0$ donc $\boxed{p \text{ est le projecteur sur } \ker(u - id) \text{ parallèlement à } \ker(u - 2id)^2}$
On fait de même pour q.

6. On a, par définition d'un projecteur et construction de $\mathcal{B}$ qui est une base adaptée à $\mathbb{R}^3 = \text{Im}(p) \oplus \ker(p) = \ker(q) \oplus \text{Im}(q)$, $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(q) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(d) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. On en déduit que la décomposition de Dunford de u est $u = d + n$ avec $n = u - (p + 2q)$. On retrouve alors $D = V(A)(A - 2I_3)^2 + 2U(A)(A - I_3) = (A - 2I_3)^2 + 2(3I_3 - A)(A - I_3) = -A^2 + 4A - 2I_3$ et $N = A - D = (A - I_3)(A - 2I_3)$.

Partie III :

1. Fait en cours (ex II.15)
2. D'après la question précédente, il existe P inversible telle que $A = PD_1P^{-1}$ et $B = PD_2P^{-1}$ avec D_i diagonales. On a alors $A - B = P(D_1 - D_2)P^{-1}$ et comme $D_1 - D_2$ reste diagonale, $\boxed{A - B \text{ est diagonalisable}}$
3. On a $A^k = B^h = 0$ donc, comme $AB = BA$, on a $(A - B)^{k+h} = \displaystyle\sum_{i=0}^{k+h}(-1)^{k+h-i}\binom{k+h}{i}A^iB^{k+h-i}$. Si $i \geqslant k$ alors $A^i = 0$ donc $A^iB^{k+h-i} = 0$ et si $i \leqslant k - 1$, alors $k + h - i \geqslant h + 1$ donc $B^{k+h-i} = 0$ donc $A^iB^{k+h-i} = 0$. Tous les termes de la somme sont nuls donc $(A - B)^{k+h} = 0$ donc $\boxed{A - B \text{ est nilpotente}}$
4. Elles sont nulles : fait en cours (ex II.11)
5. Si on suppose que A possède deux décompositions de Dunford $A = D + N = D' + N'$, on a $D - D' = N' - N$. Comme D et D' sont des polynômes en A, D et D' commutent donc $D - D'$ est diagonalisable. De même, N et N' sont des polynômes en A donc commutent et $N' - N$ est nilpotente. La matrice $D - D' = N' - N$ est donc à la fois diagonalisable et nilpotente donc est nulle. On a donc $D = D'$ et $N = N'$ donc $\boxed{\text{la décomposition de Dunford est unique si elle existe}}$