I Réduction des endomorphismes

1. Éléments propres

a) Valeurs propres et vecteurs propres d'un endomorphisme : définitions, spectre, les sous-espaces propres associés à des valeurs propres 2 à 2 distinctes sont en somme directe, liberté d'une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres 2 à 2 distinctes, stabilité des espaces propres de u par un endomorphisme commutant avec u.

b) Valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice carrée : définition, cas d'une matrice réelle (les valeurs propres complexes sont conjuguées et les espaces propres correspondants sont de même dimension).

c) Polynôme caractéristique : ordre de multiplicité des valeurs propres, expression de la trace et du déterminant en fonction des valeurs propres, deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique, $\mathcal{X}_A = \mathcal{X}_{A^T}$, lien entre la dimension d'un espace propre et l'ordre de multiplicité de la valeur propre correspondante. Le polynôme caractéristique de tout endomorphisme induit par u sur un sous-espace stable divise $\mathcal{X}_u$.

2. Réduction des endomorphismes en dimension finie (et des matrices carrées)

a) Diagonalisation : définitions équivalentes (E est somme directe des espaces propres, existence d'une base de E formée de vecteurs propres, $\dim(E)$ est égal à la somme des dimensions des sous-espaces propres), u est diagonalisable si et seulement si χ_u est scindé et pour toute valeur propre λ, $\dim E_\lambda(u) = m_\lambda(u)$, cas particulier des endomorphismes dont le polynôme est scindé à racines

b) Polynôme annulateur : si $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$ alors $P(\lambda) \in \mathrm{Sp}(P(u))$, $\mathrm{Sp}(u)$ est inclus dans l'ensemble des racines de tout polynôme annulateur, u est diagonalisable si et seulement si u possède un polynôme annulateur scindé à racines simples donc si et seulement si $\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (X - \lambda)$ est annulateur de u, théorème de Cayley-Hamilton (*preuves non exigibles*). Tout endomorphisme induit par u diagonalisable sur un sous espace stable reste diagonalisable.

c) Trigonalisation : définition, u est trigonalisable si et seulement si $\mathcal{X}_u$ est scindé. Tout endomorphisme induit par u trigonalisable sur un sous-espace stable reste trigonalisable. Application aux suites récurrentes linéaires, au spectre de $P(A)$,...

II Suites et séries de fonctions

Les fonctions considérées sont à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Modes de convergence des suites de fonctions

a) Convergence d'une suite de fonctions : convergence simple, convergence uniforme et convergence uniforme sur tout segment.

b) Continuité et convergence uniforme : la limite uniforme d'une suite de fonctions continues sur I est une fonction continue sur I ; le résultat reste valable dans le cas de la convergence uniforme sur tout segment de I.

2. Modes de convergence d'une série de fonctions

a) Convergence simple, uniforme, normale, uniforme et normale sur tout segment. La convergence normale sur I entraine la convergence absolue en $x \in I$.

b) Théorèmes de continuité et de double limite (*admis*) pour la somme d'une série de fonctions.

À suivre : la fin des suites et séries de fonctions