

Exercice 1 (Mines-Ponts PSI 2023)

Pour $n \geq 1$ et $x \in [0, 1]$, on pose $f_n(x) = \frac{e^{-x}}{1 + n^2 x^2}$

1. Étudier la convergence simple de (f_n) sur $[0, 1]$
2. Soit $a \in]0, 1[$, a-t-on convergence uniforme sur $[a, 1]$?
3. Étudier la convergence uniforme de (f_n) sur $[0, 1]$
4. On pose $u_n = \int_0^1 f_n(t) dt$. Déterminer la limite de (u_n) .
5. Étudier la convergence de $\sum u_n$. (*)

Exercice 2 (CCINP PSI 2024)

Soit $g_n(y) = \frac{(-1)^n}{n + (\ln(n))^y}$, $y \in \mathbb{R}$

1. Étudier la convergence $\sum g_n$. (*)
2. Lorsqu'elle existe étudier la continuité de $F(y) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n + (\ln(n))^y}$

Exercice 3 (CCINP PSI 2021)

Soit $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{1 + n^4 x^3} dx$, pour $n \geq 1$.

1. Justifier l'existence de I_n .
2. Montrer que $I_n = \frac{1}{n^{5/3}} J_n$ avec $J_n = \int_0^{+\infty} \frac{n^{1/3} \sin\left(\frac{t}{n^{1/3}}\right)}{1 + t^3} dt$.
3. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = K = \int_0^{+\infty} \frac{t}{1 + t^3} dt$
4. Montrer, par changement de variable que $K = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + t^3} dt$.
5. En déduire $2K = \int_0^{+\infty} \frac{1+t}{1+t^3} dt = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$
6. Conclure $I_n \sim \frac{2\pi}{3\sqrt{3}n^{5/3}}$

Exercice 4 (Mines-Ponts PSI 2018)

Soit $I_n = \int_0^1 \ln(x) \ln(1 - x^n) dx$, pour $n \geq 1$.

1. Justifier l'existence de I_n .
2. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.
3. Déterminer un équivalent de I_n . (*)

Exercice 5 (Mines-Télécom PSI 2024)

Soit $u_n = \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \cos(x) dx$. Étudier la convergence de la suite (u_n) .

Exercice 6 (Mines-Ponts PSI 2018)

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $y > 0$, on pose $f(x, y) = \int_0^1 t^{xt^y} dt$.

1. Justifier l'existence de $f(x, y)$.
2. On pose $f_n(t) = \begin{cases} \frac{1}{n!} (xt^y \ln t)^n & \text{si } t \in]0, 1] \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$.

Montrer que $\sum f_n$ converge normalement sur $[0, 1]$.

3. En déduire $\int_0^1 t^t dt = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^n}$.

Indications

Exercice 1

5. La série DV donc minorer u_n .

Exercice 2

1. Montrer que le CSSA est vérifié pour $n \geq -y$ dans le cas $y < 0$.

Exercice 4

3. Poser $t = x^n$.