

Partie I

1. Pour $x \in \mathcal{D}$ fixé, on a $u_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$ positif donc $\sum u_n(x)$ converge. Ainsi $\boxed{\sum u_n \text{ converge simplement sur } \mathcal{D}}$
2. a) u_n est bien de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{D}$ et pour $x \in \mathcal{D}$, on a $\boxed{u_n^{(p)}(x) = \frac{(-1)^p(p+1)!}{(n+x)^{p+2}}}$ (récurrence sur p)
 - b) Si $x \in [a, b]$, on a $\left| u_n^{(p)}(x) \right| \leq \frac{(p+1)!}{(n+a)^{p+2}}$ (indépendant de x) donc $\left\| u_n^{(p)} \right\|_{\infty, [a, b]} \leq \frac{(p+1)!}{(n+a)^{p+2}}$ donc comme $\sum \frac{1}{(n+a)^{p+2}}$ converge, $\boxed{\sum u_n^{(p)} \text{ converge normalement sur } [a, b]}$
 - c) On a, pour $k \in \mathbb{N}^*$,
 - H1 : les fonctions u_n sont $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -1, +\infty[$.
 - H2 : pour $j \in \llbracket 0, k \rrbracket$, la série de fonctions $\sum u_n^{(j)}$ converge simplement sur $] -1, +\infty[$ (car elle converge normalement sur tout segment de $] -1, +\infty[$).
 - H3 : la série de fonctions $\sum u_n^{(k)}$ converge normalement sur tout segment de $] -1, +\infty[$.

donc U est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $] -1, +\infty[$ et $U^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n^{(k)}(x)$.

En conclusion, ceci étant valable pour tout $k \geq 1$, on a :

$$\boxed{U \in \mathcal{C}^\infty(]-1, +\infty[, \mathbb{R}) \text{ et si } x > -1 \text{ et } p \in \mathbb{N}, U^{(p)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^p(p+1)!}{(n+x)^{p+2}}}$$

3. a) On a $U(x+N) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x+N)^2} = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2} = U(x) - U_N(x)$ donc $\boxed{U(x) = U(x+N) + U_N(x)}$
 - b) $U \in \mathcal{C}^\infty(]-1, 0[, \mathbb{R})$ donc $x \mapsto U(x+N) \in \mathcal{C}^\infty(]-N-1, -N[, \mathbb{R})$ (car $x \in]-1, 0[\Rightarrow (x+N) \in]-N-1, -N[$). De plus N étant fixé, U_N est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -N-1, -N[$ comme somme finie de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur cet intervalle. Par somme, on a $U \in \mathcal{C}^\infty(]-N-1, -N[, \mathbb{R})$ et donc, ceci étant valable pour tout N , on a $\boxed{U \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{D}, \mathbb{R})}$

- c) On commence par montrer que $U^{(p-2)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^p(p-1)!}{(n+x)^p}$ pour tout x de $\mathcal{D}$: si $x \in]-1, +\infty[$, c'est déjà fait ; si $x \in]-N-1, -N[$, on a $U(x) = U(x+N) + U_N(x)$ et $x+N \in]-1, 0[$ donc on a $U^{(p-2)}(x) = U^{(p-2)}(x+N) + U_N^{(p-2)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^p(p-1)!}{(n+x+N)^p} + \sum_{n=1}^N u_n^{(p-2)}(x)$ (car la deuxième somme est finie) donc on a bien, après changement d'indice et regroupement des 2 sommes, le résultat annoncé.

On en déduit que $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^p} = \frac{(-1)^p}{(p-1)!} U^{(p-2)}(x)}$

4. On a, pour $x \in]-N-1, -N[\cup]-N, -N+1[$, $U(x) = U_{N-1}(x) + u_N(x) + U(x+N)$. U_{N-1} est continue en $-N$ et $x \mapsto U(x+N)$ est continue en $-N$ car U est continue en 0, donc ces deux fonctions sont bornées au voisinage de $-N$; enfin, comme $\lim_{x \rightarrow -N} u_N(x) = +\infty$, on $U(x) \underset{x \rightarrow -N}{\sim} u_N(x)$ donc $\boxed{U(x) \underset{x \rightarrow -N}{\sim} \frac{1}{(N+x)^2}}$

5. a) U est une somme de fonctions strictement décroissantes sur $] -1, +\infty[$ donc $\boxed{U \text{ est strictement décroissante sur }] -1, +\infty[}$

On peut aussi utiliser l'expression de U' obtenue à la question 2.

- b) On a pour $n \geq 0$, $\frac{1}{(n+1+x)^2} \leq \int_n^{n+1} \frac{dt}{(t+x)^2} \leq \frac{1}{(n+x)^2}$ donc pour $n \geq 1$, on a : $\int_n^{n+1} \frac{dt}{(t+x)^2} \leq u_n(x) \leq \int_{n-1}^n \frac{dt}{(t+x)^2}$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{(t+x)^2}$ est continue et intégrable sur $[0, +\infty[$ car $x > 0$ donc, en sommant pour $n \geq 1$, on a $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{(t+x)^2} \leq U(x) \leq \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t+x)^2}$. On pose alors $u = t+x$ (la fonction $t \mapsto t+x$ est $\mathcal{C}^1$, bijective, strictement croissante sur $\mathbb{R}$) et on obtient $\boxed{\int_{x+1}^{+\infty} \frac{du}{u^2} \leq U(x) \leq \int_x^{+\infty} \frac{du}{u^2}}$

On en déduit que $\frac{1}{x+1} \leq U(x) \leq \frac{1}{x}$ et comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} xU(x) = 1$, on a $\boxed{U(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x}}$

6. $U_N\left(\frac{x}{2}\right) + U_N\left(\frac{x-1}{2}\right) = \sum_{n=1}^N \frac{4}{(2n+x)^2} + \sum_{n=1}^N \frac{4}{(2n+x-1)^2} = 4U_{2N}(x)$ donc quand N tend vers $+\infty$, on a

$$U\left(\frac{x}{2}\right) + U\left(\frac{x-1}{2}\right) = 4U(x)$$

Partie II

1. Pour $x > 0$, $t \mapsto f(t)e^{-xt}$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$; $\lim_{t \rightarrow 0} f(t)e^{-xt} = 1$ et $f(t)e^{-xt} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ (car $x > 0$) donc $t \mapsto f(t)e^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ si $x > 0$

2. a) On a $\varphi(x) - \varphi(x+1) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} (e^{-((x+1)-1)t} - e^{-(x+1)t}) dt = \int_0^{+\infty} t e^{-(x+1)t} dt$. On effectue alors une IPP : les fonctions $t \mapsto t$ et $t \mapsto \frac{e^{-(x+1)t}}{-(x+1)}$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} t \frac{e^{-(x+1)t}}{-(x+1)} = 0$.

On a donc $\varphi(x) - \varphi(x+1) = \left[t \frac{e^{-(x+1)t}}{-(x+1)} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 1 \times \frac{e^{-(x+1)t}}{x+1} dt$ et $\varphi(x) - \varphi(x+1) = \frac{1}{(x+1)^2}$ si $x > -1$

b) On vérifie (par une étude de fonction) que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $e^t \geq 1+t$ donc $0 \leq f(t) \leq 1$ si $t > 0$. On a alors $0 \leq f(t)e^{-xt} \leq e^{-xt}$ et comme $t \mapsto e^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ si $x > 0$, on a $0 \leq \varphi(x) \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x}$.

On en déduit donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi = 0$

c) On fixe $x > -1$, on a, pour $n \geq 0$, $\varphi(x+n) - \varphi(x+n+1) = \frac{1}{(x+n+1)^2}$; la série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(n+x+1)^2}$ est

convergente donc $\sum_{n=0}^{+\infty} [\varphi(x+n) - \varphi(x+n+1)] = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+x+1)^2} = U(x)$. La série de gauche étant télescopique,

comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(x+n+1) = 0$, on a bien $\varphi(x) = U(x)$ si $x > -1$

d) Les fonctions U et φ sont égales sur $] -1, +\infty[$ et U est $\mathcal{C}^\infty$ sur cet intervalle donc φ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -1, +\infty[$. Reste à obtenir la valeur de $\varphi^{(p)}$: on utilise le TITT.

Pour $t > 0$, on a $0 < e^{-t} < 1$ donc $\frac{t^{p+1}}{e^t - 1} e^{-xt} = \frac{t^{p+1}}{1 - e^{-t}} e^{-(x+1)t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^{p+1} e^{-(x+1+n)t}$. On pose alors, pour $x > -1$ et $p \geq 2$ fixés, $h_n(t) = t^{p+1} e^{-(x+n+1)t}$ et on vérifie les hypothèses du TITT :

H1 : la série de fonctions $\sum h_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ vers $t \mapsto \frac{t^{p+1}}{e^t - 1} e^{-xt}$.

H2 : les fonction h_n et la fonction $t \mapsto \frac{t^{p+1}}{e^t - 1} e^{-xt}$ sont continues sur $]0, +\infty[$.

H3 : on a $\lim_{t \rightarrow 0} h_n(t) = 0$ car $p+1 \geq 1$ et $h_n(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ car $x+n+1 > 0$ donc h_n est intégrable sur $]0, +\infty[$.

H4 : on a $\int_0^{+\infty} |h_n(t)| dt = \int_0^{+\infty} t^{p+1} e^{-(x+n+1)t} dt$. On effectue alors $(p+1)$ IPP dont les justifications sont les mêmes que celles de la question **II.2.a** et on trouve $\int_0^{+\infty} |h_n(t)| dt = \frac{(p+1)!}{(n+x+1)^{p+2}}$. La série $\sum_{n \geq 0} \int_0^{+\infty} |h_n(t)| dt$ est donc convergente.

On a donc $\int_0^{+\infty} \frac{t^{p+1}}{e^t - 1} e^{-xt} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} h_n(t) dt = (p+1)! \times \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^{p+2}} = (-1)^p U^{(p)}(x)$; les calculs d'intégrales ont déjà été faits puisque $h_n \geq 0$.

On en déduit $\varphi^{(p)}(x) = U^{(p)}(x) = (-1)^p \int_0^{+\infty} \frac{t^{p+1}}{e^t - 1} e^{-xt} dt$ si $x > -1$