Espaces préhilbertiens réels

I Espaces préhilbertiens réels

1. Produit scalaire et norme euclidienne

Définition : Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Un **produit scalaire** sur E est une **forme bilinéaire symétrique définie positive**, ie une application

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (u,v) & \longmapsto & (u|v) \end{array}$$

telle que :

1. $\forall(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2, \forall(u,v,w) \in E^3, \begin{cases} (\alpha u + \beta v|w) = \alpha(u|w) + \beta(v|w) & \text{(linéaire à gauche)} \\ \text{et} \\ (u|\alpha v + \beta w) = \alpha(u|v) + \beta(u|w) & \text{(linéaire à droite)} \end{cases}$
2. $\forall(u,v) \in E^2, (u|v) = (v|u)$.
3. $\forall u \in E, (u|u) \geqslant 0$
4. $\forall u \in E, (u|u) = 0 \Rightarrow u = 0$

La **norme euclidienne** associée est alors définie sur E par

$$\forall u \in E, \|u\| = \sqrt{(u|u)}$$

Un **espace préhilbertien réel** est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire.

Remarque(s) :

(I.1) Pour montrer que φ est bilinéaire et symétrique, il suffit de prouver que φ est symétrique et linéaire à gauche (ou à droite).

(I.2) Une forme bilinéaire symétrique positive est une application $\varphi : E^2 \to \mathbb{R}$ qui ne vérifie que les propriétés **1**, **2** et **3** de la définition précédente. L'application $u \mapsto \sqrt{(u|u)}$ est alors définie sur E mais ce n'est plus une norme.

Exemple(s) :

(I.3) Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors $\varphi_A : (X,Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2 \mapsto X^T AY$ est bilinéaire. De plus φ_A est symétrique si et seulement si A est symétrique (ie $A = A^T$).

Définition [I.1] : (Produits scalaires usuels)

1. Le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ est défini par

$$(x|y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = X^T Y$$

si $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ où $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(x)$ et $Y = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(y)$ avec $\mathcal{B}_c$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

2. Le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est défini par

$$(A|B) = \operatorname{Tr}\left(A^T B\right).$$

3. Sur $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$, on définit un produit scalaire en posant

$$(f|g) = \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

ou plus généralement $(f|g) = \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)u(t)\,\mathrm{d}t$ où $u \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ est strictement positive sur $[a,b]$.

Remarque(s) :

(I.4) Il ne faut pas confondre le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$, $(X|Y) = X^T Y$ avec X et Y des vecteurs colonnes, et le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $(A|B) = \operatorname{Tr}(A^T B)$ avec A et B des matrices.

Exemple(s) :

(I.5) $(P|Q) = \displaystyle\int_a^b P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$ avec $a < b$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

(I.6) Le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}_n[X]$ est $(P|Q) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} \times \frac{Q^{(k)}(0)}{k!}$ avec $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_k X^k$.

(I.7) Sur l'ensemble E des fonctions continues et de carré intégrable sur I (ie telles que f^2 est intégrable sur I), on définit un produit scalaire par $(f|g) = \displaystyle\int_I fg$.

Propriété [I.2] : Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire $(\,|\,)$

1. (Identités remarquables)

$$\forall (u,v) \in E^2, \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + 2(u|v) + \|v\|^2 \text{ et } \|u-v\|^2 = \|u\|^2 - 2(u|v) + \|v\|^2$$

2. (Identités de polarisation)

$$\begin{aligned}
\forall (u,v) \in E^2, (u|v) &= \frac{1}{2}\left(\|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\|u\|^2 + \|v\|^2 - \|u-v\|^2\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2\right)
\end{aligned}$$

Propriété [I.3] : (Inégalité de Cauchy-Schwarz)
Soit E un espace préhilibertien réel, on a :

$$\forall (u,v) \in E^2, |(u|v)| \leqslant \|u\| \times \|v\|$$

De plus $|(u|v)| = \|u\| \times \|v\|$ si et seulement si u et v sont liés.

Remarque(s) :

(I.8) Si φ est une forme bilinéaire symétrique positive, on a encore $|\varphi(u,v)| \leqslant \sqrt{\varphi(u,u)} \times \sqrt{\varphi(v,v)}$ mais la caractérisation de l'égalité n'est vraie que pour un produit scalaire.

Exemple(s) :

(I.9) Si f et g sont $\mathcal{CM}^0$ et de carrés intégrables sur I alors fg est intégrable sur I et

$$\left(\int_I f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \left(\int_I f(t)^2\,\mathrm{d}t\right)\left(\int_I g(t)^2\,\mathrm{d}t\right)$$

Si de plus f et g sont continues sur I alors on a égalité si et seulement si f et g sont liées.

Propriété [I.4] : (Inégalité triangulaire ou inégalité de Minkowski)
Soient E un espace préhilbertien réel, on a :

$$\forall (u,v) \in E^2, \|u+v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$$

De plus $\|u+v\| = \|u\| + \|v\|$ si et seulement si u et v sont positivement liés (ie $\exists \lambda \in \mathbb{R}^+, u = \lambda v$ ou $v = \lambda u$).

Remarque(s) :

(I.10) Si φ est une forme bilinéaire symétrique positive et q la forme quadratique associée, on a encore $\sqrt{q(u+v)} \leqslant \sqrt{q(u)} + \sqrt{q(v)}$ mais la caractérisation de l'égalité n'est vraie que pour un produit scalaire.

Conséquence [I.5] : Soient E un espace préhilbertien réel et $(\,|\,)$ le produit scalaire.
L'application $x \in E \longmapsto \|x\| = \sqrt{(x|x)}$ est une norme sur E.

Exemple(s) :

(I.11) Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Montrer que $\ker(A) = \ker(A^TA)$ et $\mathrm{Im}(A^T) = \mathrm{Im}(A^TA)$.

2. Orthogonalité

Définition : Soient $(E, (\,|\,))$ un espace préhilbertien et $(u,v) \in E^2$.
1. On dit que u est **unitaire** (ou normé) si $\|u\| = 1$.
2. On dit que u et v sont **orthogonaux** si $(u|v) = 0$; on le note $u \perp v$.

Remarque(s) :

(I.12) Si $x \neq 0$ alors $\dfrac{x}{\|x\|}$ est unitaire.

(I.13) Dans un espace préhilbertien réel, si $\|x\| = \|y\|$ alors $(x+y) \perp (x-y)$.

Définition : Soient $(E, (\,|\,))$ un espace préhilbertien et $(x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E.
1. On dit que $(x_i)_{i\in I}$ est **orthogonale** si $\forall (i,j) \in I^2, i \neq j \Rightarrow (x_i|x_j) = 0$.
2. On dit que $(x_i)_{i\in I}$ est **orthonormale** (ou orthonormée) si $\forall (i,j) \in I^2, (x_i|x_j) = \delta_{ij}$.

Propriété [I.6] : Soit E un espace préhilbertien.
1. Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.
2. Si $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une famille orthogonale alors $\left\|\sum_{i=1}^n x_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2$ (théorème de Pythagore).

Définition : Soient $(E, (|))$ un espace préhilbertien, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On dit que F et G sont **orthogonaux** si $\forall (x,y) \in F \times G, (x|y) = 0$; on le note $F \perp G$.

Propriété [I.7] : Soient E un espace préhilbertien et $F_1, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E, 2 à 2 orthogonaux. Alors la somme de F_i est directe : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} F_i = \bigoplus_{i=1}^{n} F_i$.

Définition : Soient $(E, (|))$ un espace préhilbertien et X une partie (quelconque) de E. On définit **l'orthogonal** de X, noté $X^\perp$ par

$$X^\perp = \{u \in E, \forall x \in X, (u|x) = 0\}$$

Exemple(s) :

(I.14) Dans $\mathbb{R}^4$ canoniquement euclidien, déterminer l'orthogonal de $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, x + y - z = 2x - y - 2t = 0\}$.

(I.15) Dans $\mathbb{R}_3[X]$ muni du produit scalaire $(P|Q) = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$, déterminer l'orthogonal de l'espace $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X], P(0) = P'(1) = 0\}$.

Propriété [I.8] : Soient $(E, (|))$ un espace préhilbertien , X et Y deux parties de E.

1. $X^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. $X^\perp = \mathrm{Vect}\{X\}^\perp$
3. Si $X \subset Y$ alors $Y^\perp \subset X^\perp$.
4. $X \cap X^\perp \subset \{0\}$ et $X \subset \left(X^\perp\right)^\perp$.
5. $X \perp Y \Leftrightarrow X \subset Y^\perp \Leftrightarrow Y \subset X^\perp$.

Remarque(s) :

(I.16) On peut avoir $\left(F^\perp\right)^\perp \neq F$ même si F est un sev de E ; c/ex : dans $\mathbb{R}[X]$ muni de $(P|Q) = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$, avec le sous-espace $F = \{P \in \mathbb{R}[X], P(0) = 0\}$.

Exemple(s) :

(I.17) Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, on a $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$ et $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$.

II Espaces euclidiens

Définition : Un **espace euclidien** est un espace préhilbertien réel de dimension finie.

Remarque(s) :

(II.1) Tout espace vectoriel réel de dimension finie peut être muni d'un produit scalaire, qui en fait donc un espace euclidien.

1. Bases orthonormales

Définition : Soient E un espace euclidien et $\mathcal{B}$ une famille de vecteurs de E. On dit que $\mathcal{B}$ est une **base orthonormale** (ou orthonormée) de E si $\mathcal{B}$ est base de E et une famille orthonormale de E.

Remarque(s) :

(II.2) Pour montrer que $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de E, il suffit de prouver que $\mathcal{B}$ est une famille orthonormale et génératrice.

(II.3) Si on sait de plus que $\dim E = n$ et si $\mathcal{B}$ comporte n vecteurs, pour montrer que $\mathcal{B}$ est une base orthonormale de de E, il suffit de prouver que $\mathcal{B}$ est orthonormale.

Propriété [II.1] : (Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt)
Soient E un espace euclidien et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Alors il existe une base orthonormale $\mathcal{B}_\perp = (f_1, \ldots, f_n)$ de E telle que

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \mathrm{Vect}\{e_1, \ldots, e_k\} = \mathrm{Vect}\{f_1, \ldots, f_k\}$$

ie telle que la matrice de passage $P(\mathcal{B}, \mathcal{B}_\perp)$ est triangulaire supérieure.
Les vecteurs de $\mathcal{B}_\perp$ sont définis par

$$\begin{cases} f_1 = \dfrac{e_1}{\|e_1\|} \\ f_k = \dfrac{g_k}{\|g_k\|} \text{ avec } g_k = e_k - \displaystyle\sum_{j=1}^{k-1} (f_j|e_k) f_j \text{ si } k \geqslant 2 \end{cases}$$

Remarque(s) :

(II.4) Il est indispensable savoir appliquer ce procédé de façon à construire une base d'un espace préhilbertien mais aussi de connaître l'énoncé de cette propriété (pour des exercices plus théoriques).

Exemple(s) :

(II.5) Déterminer une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$ pour le produit scalaire $(P|Q) = P(-1)Q(-1) + P(0)Q(0) + P(1)Q(1)$.

(II.6) Soit $(\,|\,)$ un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$. Il existe une base $(P_0, \ldots, P_n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ telle que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\deg(P_k) = k$.

Conséquence [II.2] : Soit E un espace euclidien.

1. E possède une base orthonormale.
2. Toute famille orthonormale de E peut être complétée en un base orthonormale de E (théorème de la base orthonormée incomplète).

Remarque(s) :

(II.7) Si $E = \overset{\perp}{\displaystyle\bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant p}} F_i$ et si $\mathcal{B}_i$ est une base orthonormale de F_i (pour tout indice i) alors $(\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_p)$ est une base orthonormale de E adaptée à cette décomposition.

Propriété [II.3] : (Calculs dans une base orthonormale)
Soient E un espace euclidien et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E.

1. Si $x \in E$, on a
$$x = \sum_{i=1}^{n} (e_i|x) e_i$$
2. Si $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i e_i$ alors on a, avec $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ et $Y = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(y)$:
$$(x|y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum_{i=1}^{n} (e_i|x)(e_i|y) = X^T Y \quad \text{et} \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (e_i|x)^2 = X^T X$$

Remarque(s) :

(II.8) Si on pose $\varphi_i(x) = (e_i|x)$ alors $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ une base de $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ telle que $\varphi_i(e_j) = \delta_{i,j}$.

Conséquence [**II.4**] **:** Soient E un espace euclidien, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$. Alors pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on a

$$a_{i,j} = (e_i | f(e_j)).$$

2. Formes linéaires et hyperplans

Propriété [**II.5**] **:** Soient $(E, (\,|\,))$ un espace euclidien et φ une forme linéaire sur E. Alors il existe un unique $a \in E$ tel que

$$\forall x \in E, \varphi(x) = (a|x)$$

Exemple(s) :

(II.9) Dans $\mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire $(P|Q) = \sum_{i=0}^{2} P(i)Q(i)$, déterminer le polynôme $A \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \int_0^1 tP(t)\,\mathrm{d}t = (A|P)$.

Remarque(s) :

(II.10) En dimension infinie l'existence de a tel que $\forall x \in E, \varphi(x) = (a|x)$ n'est pas assurée ; c/ex : sur $\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ muni de $(f|g) = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ avec $\varphi : f \mapsto f(0)$.

Définition : Soient E un espace euclidien et H un hyperplan de E. On appelle **vecteur normal à** H tout vecteur non nul de $H^\perp$.

Remarque(s) :

(II.11) On a alors $H^\perp = \mathrm{Vect}\{a\}$ ou $E = H \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Vect}\{a\}$.

Propriété [**II.6**] **:** Soient E un espace euclidien et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E

1. Si H est un hyperplan de E, il existe un vecteur a non nul de E tel que

$$H = \{x \in E, (a|x) = 0\}$$

   Le vecteur a est alors un vecteur normal à H.
   Si $a = a_1e_1 + \cdots + a_ne_n$ alors $x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n \in H$ si et seulement si $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$ (équation cartésienne de H dans la base $\mathcal{B}$).
2. Inversement, si $H = \{x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n \text{ tq } a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0\}$ avec $(a_1, \dots, a_n) \neq (0, \dots, 0)$ alors H est un hyperplan de E et $a = a_1e_1 + \cdots + a_ne_n$ est un vecteur normal à H.

3. Projecteurs orthogonaux

Propriété [**II.7**] **:** Soient E un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de E. Si F est de dimension finie alors $F^\perp$ et F sont supplémentaires dans E :

$$E = F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp$$

$F^\perp$ est appelé **le supplémentaire orthogonal** de F.

Conséquence **[II.8] :** Soient E un espace euclidien et F un sous-espace vectoriel de E. Alors on a

1. $\dim\left(F^{\perp}\right) = \dim(E) - \dim(F)$.

2. $\left(F^{\perp}\right)^{\perp} = F$.

Exemple(s) :

(II.12) Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et si $\mathbb{R}^n$ est canoniquement euclidien, on a $(\ker A)^{\perp} = \mathrm{Im}(A^T)$ et $(\mathrm{Im}\, A)^{\perp} = \ker(A^T)$.

(II.13) Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, euclidien, on a $F^{\perp} + G^{\perp} = (F \cap G)^{\perp}$.

Définition : Soient E un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. La **projection orthogonale** sur F est la projection sur F parallèlement à $F^{\perp}$.
Si $x \in E$ alors le projeté orthogonal de x sur F est donc l'unique vecteur $\pi_F(x)$ tel que

$$\pi_F(x) \in F \quad \text{et} \quad x - \pi_F(x) \in F^{\perp}$$

Remarque(s) :

(II.14) $p \in \mathcal{L}(E)$ est un projecteur orthogonal si et seulement si $p \circ p = p$ et $\ker(p) \perp \mathrm{Im}(p)$.

Exemple(s) :

(II.15) Soit p un projecteur de E euclidien. Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si $\forall x \in E, \|p(x)\| \leqslant \|x\|$

Conséquence **[II.9] :** Soient E un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. Si $(f_1, \dots, f_k)$ est une famille génératrice de F et $x \in E$, $\pi_F(x)$ est donc l'unique vecteur de E tel que

$$\pi_F(x) \in F \text{ et } \forall i \in [\![1, k]\!], (x - \pi_F(x)|f_i) = 0$$

Exemple(s) :

(II.16) Soit $E = \mathcal{C}^{\infty}([0,\pi], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire $(f|g) = \displaystyle\int_0^{\pi} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$. Déterminer le projeté orthogonal de id sur $F = \{f \in E, f'' + f = 0\}$.

Propriété **[II.10] :** Soient $(E, (\,|\,))$ un espace préhilbertien, F un sous-espace vectoriel de dimension finie et $(e_1, \dots, e_p)$ une base orthonormale de F. Alors, pour $x \in E$, le projeté orthogonal de x sur F est

$$\pi_F(x) = \sum_{i=1}^{p} (e_i|x)e_i$$

.

Exemple(s) :

(II.17) Dans $\mathbb{R}^4$, canoniquement euclidien, écrire la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ de la projection orthogonale sur $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, x + y + z + t = x + 2y + 3z + 4t = 0\}$.

Définition **[II.11] :** Soient E un espace préhilbertien, F un sous-espace vectoriel de E et $x \in E$. La **distance de** x **à** F est

$$d(x, F) = \inf_{y \in F} \|x - y\|$$

Propriété **[II.12] :** Soient E un espace préhilbertien, F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie et $x \in E$. Alors $d(x,F) = \min_{y \in F} \|x-y\|$ est atteinte en un point unique de F, le projeté orthogonal $\pi_F(x)$ de x sur F :

$$d(x,F)^2 = \|x - \pi_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - \|\pi_F(x)\|^2$$

Exemple(s) :

(II.18) Déterminer $\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 (e^x - ax - b)^2 \, \mathrm{d}x$.

(II.19) On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétriques, $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques.

a) Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux pour le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b) Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donnée, déterminer $\inf_{M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})} \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (a_{i,j} - m_{i,j})^2$.

Conséquence **[II.13] :** Soient E un espace euclidien et $x \in E$.

1. Si $D = \text{Vect}\{e\}$ est une droite de E alors $\pi_D(x) = \dfrac{(e|x)}{\|e\|^2} e$ et $d(x,D)^2 = \|x\|^2 - \dfrac{(e|x)^2}{\|e\|^2}$.

2. Si $H = \{e\}^\perp$ est un hyperplan de E, dont e est un vecteur normal, alors on a $\pi_H(x) = x - \pi_D(x) = x - \dfrac{(e|x)}{\|e\|^2} e$, où $D = \text{Vect}\{e\} = H^\perp$ est la droite supplémentaire orthogonale de H et $d(x,H) = \dfrac{|(e|x)|}{\|e\|}$.

Remarque(s) :

(II.20) Soit $\mathcal{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, ax + by + c = 0\right\}$ avec $(a,b) \neq (0,0)$ une droite affine de $\mathbb{R}^2$, canoniquement euclidien, et $M_0 = (x_0, y_0)$ un point de $\mathbb{R}^2$. La distance de M_0 à la droite $\mathcal{D}$ est

$$d(M_0, \mathcal{D}) = \inf_{M \in \mathcal{D}} \left\|\overrightarrow{M_0 M}\right\| = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$