**L'usage des calculatrices est interdit**

*Le sujet se compose d'un problème d'algèbre linéaire et d'un exercice d'analyse indépendants. Veuillez changer de page entre les deux (inutile de faire deux copies séparées).*

# PROBLÈME

(Inspiré de CCP MP 2012 maths 2)

Dans tout le problème, $n$ est un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre $n$ à coefficients réels, $(E_{i,j})$ sa base canonique ($1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant n$) et $I_n$ sa matrice unité (tous les coefficients de $E_{i,j}$ sont nuls, sauf celui situé à la $i^{\text{ème}}$ ligne et à la $j^{\text{ème}}$ colonne, qui vaut 1).
On note $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels.
Dans tout le problème, $A$ est une matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $u$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à la matrice $A$.
Pour tout $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$, on note $P(A) = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k A^k$.
L'ensemble des matrices $P(A)$ pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ est noté $\mathbb{R}[A]$.

On note $\phi_A$ l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\phi_A(M) = AM - MA$$

L'objet du problème est d'étudier quelques propriétés des éléments propres de $\phi_A$.
**Les parties sont indépendantes entre elles.**

## Partie I. Généralités et exemples

**1.** Vérifier que l'application $\phi_A$ est linéaire et que $I_n$ et $A$ appartiennent à $\ker \phi_A$.

**2.** Dans cette question, on suppose $n = 2$ et on pose $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

a) Donner la matrice de $\phi_A$ dans la base $\mathcal{B}_c = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
b) En déduire que $\phi_A$ est nulle si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A = \lambda I_2$

Dans toute la suite de cette question, on suppose que $A \neq \lambda I_2$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et donc que $\phi_A$ n'est pas nulle.

d) Montrer (très soigneusement !) que $A$ est diagonalisable (dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$) si et seulement si $(d-a)^2 + 4bc > 0$.
e) Vérifier que $\mathcal{X}_{\phi_A} = X^2\left(X^2 - (d-a)^2 - 4bc\right)$.
f) En déduire que $\phi_A$ est diagonalisable si et seulement si $A$ est diagonalisable.

**3.** Dans cette question, on suppose que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est la matrice d'un projecteur, donc qui vérifie $A^2 = A$ ; on suppose également que $A \neq 0$ et $A \neq I_n$.

a) Montrer que $X^3 - X$ est annulateur de $\phi_A$.
b) Que peut-on en déduire sur les valeurs propres de $\phi_A$ ?
c) Justifier que $\phi_A$ est diagonalisable et que $0 \in \mathrm{Sp}(\phi_A)$.
d) Montrer qu'il existe une matrice $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ et $r \in [\![1, n-1]\!]$ tels que $A = P \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$.
e) Soient $B \in \mathcal{M}_{r,n-r}(\mathbb{R})$ et $M = P \begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$.
Calculer $\phi_A(M)$.
f) En déduire $\mathrm{Sp}(\phi_A)$.

## Partie II. Étude des valeurs propres de $\phi_A$

Dans cette partie, même si la matrice $A$ est réelle, on la considère comme une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (ce qui est possible car $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$).
On prolonge $\phi_A$ en un endomorphisme $\widetilde{\phi}_A$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, défini par

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \quad , \quad \widetilde{\phi}_A(M) = AM - MA$$

La matrice $A$ étant réelle, on admettra que $\phi_A$ et $\widetilde{\phi}_A$ ont les mêmes polynômes caractéristiques : $\mathcal{X}_{\phi_A} = \mathcal{X}_{\widetilde{\phi}_A}$.

**1.** Soient $\alpha$ et $\beta$ deux valeurs propres complexes de $A$ (éventuellement égales). On note $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ un vecteur propre de $A$ associé à $\alpha$.

a) Justifier qu'il existe un vecteur $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, non nul, tel que $A^T Y = \beta Y$

b) En calculant $\widetilde{\phi}_A(XY^T)$, montrer que $\alpha - \beta$ est une valeur propre de $\phi_A$.

c) En déduire que $\alpha - \overline{\alpha}$ est valeur propre de $\widetilde{\phi}_A$ puis que si $\phi_A$ est trigonalisable alors $A$ est trigonalisable (dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).

**2.** Soient maintenant $\lambda$ une valeur propre (complexe) de $\widetilde{\phi}_A$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non nulle telle que $\widetilde{\phi}_A(M) = \lambda M$.

a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k M = M(A + \lambda I_n)^k$

b) En déduire $P(A)M = MP(A+\lambda I_n)$ pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ puis que la matrice $\mathcal{X}_A(A+\lambda I_n)$ n'est pas inversible.

c) En écrivant $\mathcal{X}_A = \prod_{i=1}^{n}(X-\alpha_i)$, les $\alpha_i$ étant complexes et éventuellement égaux, et en calculant $\det[\chi_A(A+\lambda I_n)]$, montrer qu'il existe deux indices $i$ et $j$ tels que $\lambda = \alpha_i - \alpha_j$.

d) Si on suppose $A$ trigonalisable (dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$), $\phi_A$ est-il trigonalisable ?

## Partie III. Étude de diagonalisabilité

On note $\mathcal{B}_c = (c_1, \dots, c_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

**1.** On suppose dans cette question que $A$ est diagonalisable.
On note $\mathcal{B}_e = (e_1, \dots, e_n)$ une base de vecteurs propres de $u$ (défini au début du problème) et, pour tout entier $i$ tel que $1 \leqslant i \leqslant n$, $\lambda_i$ la valeur propre associée au vecteur $e_i$. On note alors $P$ la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_c$ à la base $\mathcal{B}_e$ et $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$.
Enfin, pour tout couple $(i,j)$ d'entiers tels que $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant n$, on pose :

$$B_{i,j} = PE_{i,j}P^{-1}$$

a) Exprimer, pour tout couple $(i,j)$, la matrice $DE_{i,j} - E_{i,j}D$ en fonction de la matrice $E_{i,j}$ et des réels $\lambda_i$ et $\lambda_j$.

b) Démontrer que, pour tout couple $(i,j)$, $B_{i,j}$ est un vecteur propre de $\phi_A$.

c) En déduire que $\phi_A$ est diagonalisable.

**2.** On suppose dans cette question que $\phi_A$ est diagonalisable en tant qu'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On note $(P_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ une base de vecteurs propres de $\phi_A$ et, pour tout couple $(i,j)$, $\lambda_{i,j}$ la valeur propre associée à $P_{i,j}$.
On note $\lambda$ une valeur propre réelle de $A$ (dont l'existence est assurée par la partie II) et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ $(X \neq 0)$ une matrice colonne telle que $AX = \lambda X$.

a) Démontrer que, pour tout couple $(i,j)$, il existe un réel $\mu_{i,j}$, que l'on exprimera en fonction de $\lambda$ et $\lambda_{i,j}$, tel que $AP_{i,j}X = \mu_{i,j}P_{i,j}X$.

b) En déduire que $A$ est diagonalisable. On pourra commencer par montrer que si $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ alors il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $Y = MX$.

## Partie IV. Étude des vecteurs propres de $\phi_A$ associés à la valeur propre 0

On note $m$ la dimension de l'espace vectoriel $\mathbb{R}[A]$ :

$$m = \dim(\mathbb{R}[A]) = \dim\{P(A), P \in \mathbb{R}[X]\}$$

**1.** a) Justifier que la famille $(I_n, A, \ldots, A^m)$ est liée et en déduire l'existence d'un polynôme $P$ annulateur de $A$, non nul et tel que $\deg(P) \leqslant m$.

b) Montrer que $\mathbb{R}[A] = \operatorname{Vect}\left\{I_n, A, \ldots, A^{d-1}\right\}$, où $d = \deg(P)$ ; on pourra utiliser une division euclidienne par $P$.

c) En déduire que $d = m$ puis que la famille $\left(I_n, A, \ldots, A^{m-1}\right)$ est une base de $\mathbb{R}[A]$.

**2.** Vérifier que $\mathbb{R}[A]$ est inclus dans $\ker \phi_A$ et en déduire une minoration de $\dim \ker \phi_A$.

**3.** *Cas où $u$ est diagonalisable*

On suppose, dans cette question, que $u$ est diagonalisable. On note $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ $(1 \leqslant p \leqslant n)$ les $p$ valeurs propres distinctes de $u$ et, pour tout entier $k$ tel que $1 \leqslant k \leqslant p$, $E_{\lambda_k}(u)$ le sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda_k$. On note $m_k$ la dimension de cet espace propre.

a) Soient $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $v$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à $B$. Démontrer que $B \in \ker \phi_A$ si et seulement si, pour tout entier $k$ tel que $1 \leqslant k \leqslant p$, $E_{\lambda_k}(u)$ est stable par $v$ (c'est-à-dire $v\left(E_{\lambda_k}(u)\right) \subset E_{\lambda_k}(u)$).

b) En déduire que $B \in \ker \phi_A$ si et seulement si la matrice de $v$, dans une base adaptée à la décomposition de $\mathbb{R}^n$ en somme directe des sous-espaces propres de $u$, a une forme que l'on précisera.

c) Préciser la dimension de $\ker \phi_A$.

d) Lorsque $n = 5$, donner toutes les valeurs possibles pour cette dimension en envisageant les différentes valeurs possibles de $p$ et des $m_k$.

**Fin du problème**

# EXERCICE

(d'après CCP PSI 2008 maths 1)

Pour tout nombre réel $x$ tel que la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ converge (respectivement la série $\sum_{n\geqslant 0} \ln\left(1+e^{-nx}\right)$ converge), on note $\theta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ (respectivement $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \ln\left(1+e^{-nx}\right)$) la somme de cette série.

**Partie I : Étude de la fonction $\theta$**

**1.** Préciser, selon la valeur du nombre réel $x$, la limite de $\dfrac{1}{n^x}$ lorsque l'entier $n$ tend vers $+\infty$.

**2.** Montrer que l'ensemble de définition de la fonction $\theta$ est $]0,+\infty[$.

**3.** Justifier précisément que la fonction $\theta$ est continue sur $]0,+\infty[$.

**4.** Montrer que pour tout $x$ de $]0,+\infty[$, on a $1-\dfrac{1}{2^x} \leqslant \theta(x) \leqslant 1$.
En déduire que la fonction $\theta$ est bornée sur $]0,+\infty[$ et qu'elle admet une limite finie en $+\infty$ que l'on déterminera.

**Partie II : Étude de la fonction $f$**

Pour tout entier naturel $n$ et tout nombre réel $x$, on note $u_n(x) = \ln\left(1+e^{-nx}\right)$.

Pour tout nombre réel $x$ tel que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n(x)$ converge, on note $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ la somme de cette série. On se propose d'étudier quelques propriétés de la fonction $f$ en utilisant en particulier la valeur de $\theta(2)$.

**1.** Montrer que la fonction $f$ est définie sur $]0,+\infty[$.

**On note désormais $E = f(]0,+\infty[)$, l'image par $f$ de l'intervalle $]0,+\infty[$.**

**2.** Montrer que la fonction $f$ est continue sur $]0,+\infty[$

**3.** Montrer que la fonction $f$ est strictement monotone sur $]0,+\infty[$.

**4.** Justifier l'affirmation : « $E$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ ».

**5.** Montrer que la fonction $f$ admet une limite finie $\lambda$ (que l'on précisera) en $+\infty$.

**6.** Pour tout nombre réel $x$ strictement positif, on désigne par $\psi_x$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$\psi_x(t) = \ln\left(1+e^{-tx}\right)$$

a) On considère la fonction $\varphi$, définie sur $]0,1]$ par : $\forall y \in ]0,1], \varphi(y) = \dfrac{\ln(1+y)}{y}$.
Montrer que $\varphi$ est intégrable sur $]0,1]$ puis que

$$\int_0^1 \varphi(t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^1 \frac{\ln y}{1+y}\,\mathrm{d}y$$

b) Pour $k \in \mathbb{N}$ et $y \in ]0,1]$, on pose $\varphi_k(y) = y^k \ln(y)$. Justifier que $\varphi_k$ est intégrable sur $]0,1]$ et déterminer la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \varphi_k(y)\,\mathrm{d}y$.

c) En déduire que $\displaystyle\int_0^1 \varphi(y)\,\mathrm{d}y = \theta(2)$.

d) Justifier que, pour $x>0$, la fonction $\psi_x$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

e) À l'aide d'un changement de variable, montrer que, pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$, on a :

$$\int_0^{+\infty} \psi_x(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\theta(2)$$

**7.** En déduire la limite de $xf(x)$ lorsque $x$ tend vers 0 et préciser l'intervalle $E$.

**8.** a) Montrer que, pour $x \in [0,1]$, on a $0 \leqslant x - \ln(1+x) \leqslant \dfrac{x^2}{2}$

b) En déduire un équivalent (« simple ») de $f(x)-\lambda$ quand $x$ tend vers $+\infty$.

**Fin de l'exercice**