Correction du DS4

PROBLEME : (Inspiré de CCP MP 2012 maths 2)

Partie I

1. Pour $(M,N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ et $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, on a $\phi_A(\alpha M + \beta N) = A(\alpha M + \beta N) - (\alpha M + \beta N)A = \alpha\phi_A(M) + \beta\phi_A(N)$ donc $\boxed{\phi_A \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))}$

De plus $\phi_A(I_n) = A - A = 0$ et $\phi_A(A) = A^2 - A^2 = 0$ donc $\boxed{(I_n, A) \in (\ker \phi_A)^2}$

2. a) $\begin{cases} \phi_A(E_{1,1}) = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{pmatrix} = -bE_{1,2} + cE_{2,1} \text{ et de même,} \\ \phi_A(E_{1,2}) = -cE_{1,1} + (a-d)E_{1,2} + cE_{2,2} \\ \phi_A(E_{2,1}) = bE_{1,1} + (d-a)E_{2,1} - bE_{2,2} \text{ et} \\ \phi_A(E_{2,2}) = bE_{1,2} - cE_{2,1} \end{cases}$ donc $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(\phi_A) = \begin{pmatrix} 0 & -c & b & 0 \\ -b & a-d & 0 & b \\ c & 0 & d-a & -c \\ 0 & c & -b & 0 \end{pmatrix}}$

b) ϕ_A est nulle si et seulement si $b = c = 0$ et $a = d$ donc $\boxed{\text{si et seulement si } A \text{ est une matrice scalaire}}$

c) On a $\mathcal{X}_A = X^2 - (a+d)X + ad - bc$ donc $\mathcal{X}_A$ est scindé sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\Delta = (a-d)^2 + 4bc \geqslant 0$. Si $\Delta < 0$ alors A n'est donc pas diagonalisable. Si $\Delta > 0$, $\mathcal{X}_A$ admet 2 racines simples donc A est diagonalisable et si $\Delta = 0$ alors A admet une valeur propre double λ donc A n'est pas diagonalisable (car sinon elle serait semblable à λI_2 donc on aurait $A = \lambda I_2$). On en déduit que $\boxed{A \text{ est diagonalisable si et seulement si } (a-d)^2 + 4bc > 0}$

d) La factorisation de $\mathcal{X}_{\phi_A}$ étant donnée, il suffit de développer « bêtement » $\mathcal{X}_{\phi_A}$ et de vérifier sa factorisation.

e) Si $(d-a)^2 + 4bc > 0$ alors ϕ_A admet 2 valeurs propres simples $\pm\sqrt{(a-d)^2 + 4bc}$ et une valeur propre double 0 ; de plus, (I_2, A) est libre (car $A \neq \lambda I_2$) de $\ker(\phi_A)$ donc $\dim E_0(\phi_A) \geqslant 2 = m_0(\phi_A)$ et ϕ_A est diagonalisable.
On peut aussi utiliser la matrice : on a $\mathrm{rg}(\phi_A) \leqslant 2$ *car* $C_1 + C_2 = 0$ *et* $bC_3 + cC_4 = (a-d)C_2$ *donc on en déduit* $\dim(E_0(\phi_A)) \geqslant 2 = m_0(\phi_A)$.
Réciproquement, si ϕ_A est diagonalisable alors $\mathcal{X}_{\phi_A}$ est scindé sur $\mathbb{R}$, ie $(a-d)^2 + 4bc \geqslant 0$. Si $(a-d)^2 + 4bc = 0$ alors $\mathrm{Sp}(\phi_A) = \{0\}$ donc ϕ_A n'est pas diagonalisable (sinon la matrice de ϕ_A dans une base de vecteurs propres serait nulle donc on aurait $\phi_A = 0$). ϕ_A est donc diagonalisable si et seulement si $(a-d)^2 + 4bc > 0$. On a donc bien l'équivalence $\boxed{\phi_A \text{ est diagonalisable si et seulement si } A \text{ est diagonalisable}}$

3. a) Compte tenu de $A^2 = A$, on a $\phi_A^2(M) = A(AM - MA) - (AM - MA)A = AM - 2AMA + MA$ puis $\phi_A^3(M) = A(AM - 2AMA + MA) - (AM - 2AMA + MA)A = AM - 2AMA + AMA - AMA + 2AMA - MA$ donc $\phi_A^3(M) = \phi_A(M)$; ceci étant valable pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on a $\phi_A^3 = \phi_A$, ie $\boxed{X^3 - X \text{ annule } \phi_A}$

b) On a $X^3 - X = X(X-1)(X+1)$ donc $\boxed{\mathrm{Sp}(\phi_A) \subset \{-1, 0, 1\}}$

c) $X^3 - X$ est donc scindé à racines simples et annule ϕ_A donc $\boxed{\phi_A \text{ est diagonalisable}}$ De plus, on a vu que $\phi_A(I_n) = 0$ (et $I_n \neq 0$) donc $\boxed{0 \in \mathrm{Sp}(\phi_A)}$

d) $X^2 - X = X(X-1)$ annule A et est scindé à racines simples donc A est diagonalisable et $\mathrm{Sp}(A) \subset \{0,1\}$. il existe donc $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = P\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}$ avec $r = 0$ si $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$ et $r = n$ si $\mathrm{Sp}(A) = \{1\}$.
Si $r = 0$ alors A est semblable à la matrice nulle donc $A = 0$; de même, si $r = n$ alors A est semblable à la matrice I_n donc $A = I_n$. Ainsi, si on suppose $A \neq 0$ et $A \neq I_n$, on a $r \in [\![1, n-1]\!]$.

e) On vérifie $AM = M$ et $MA = 0$ puis $\boxed{\phi_A(M) = M}$

f) En choisissant une matrice $B \neq 0$ (ce qui est possible car $r \neq 0$ et $r \neq n$), on a une matrice M non nulle (car P est inversible) telle que $\phi_A(M) = M$ et $1 \in \mathrm{Sp}(\phi_A)$.
Si on reprend le même raisonnement avec $M = P\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix}P^{-1}$, on trouve cette fois $\phi_A(M) = -M$ et en choisissant $B \neq 0$, on aura $M \neq 0$ donc $-1 \in \mathrm{Sp}(\phi_A)$. Avec l'inclsuion inverse déjà justifiée, on a $\boxed{\mathrm{Sp}(\phi_A) = \{-1, 0, 1\}}$

Partie II

Le fait que les polynômes caractéristiques de ϕ_A *et* $\widetilde{\phi}_A$ *soient égaux vient du fait que comme* $\phi_A(E_{i,j}) = \widetilde{\phi}_A(E_{i,j})$, *la matrice de* ϕ_A *dans la base canonique de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *et celle de* $\widetilde{\phi}_A$ *dans la base canonique de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *sont égales.*

1. a) On a $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(A^T)$ donc β est aussi une valeur propre de A^T et $\boxed{\exists Y \neq 0, A^TY = \beta Y}$

b) On a $\widetilde{\phi}_A(XY^T) = AXY^T - XY^TA = \alpha XY^T - X(A^TY)^T = \alpha XY^T - X(\beta Y)^T = (\alpha - \beta)XY^T$. De plus, si $X = (x_i)$, les colonnes de XY^T sont $C_j = x_jY$ et comme $X \neq 0$, un des x_j au moins est non nul, de même $Y \neq 0$ donc une des colonnes de XY^T est non nulle et $XY^T \neq 0$. On en déduit $\boxed{\alpha - \beta \in \mathrm{Sp}(\phi_A) = \mathrm{Sp}(\widetilde{\phi}_A)}$

c) Si ϕ_A est trigonalisable alors $\mathcal{X}_{\phi_A}$ est scindé sur $\mathbb{R}$ donc toutes les valeurs propres de $\widetilde{\phi}_A$ sont réelles. Si α est une valeur propre complexe de A, comme A est réelle, $\beta = \overline{\alpha}$ est aussi une valeur propre de A. D'après la question précédente, $\alpha-\overline{\alpha}=2i\,\mathrm{Im}(\alpha)$ est alors une valeur propre de $\widetilde{\phi}_A$, ce qui impose $\mathrm{Im}(\alpha)=0$ et donc $\alpha\in\mathbb{R}$. Toutes les valeurs propres α de A sont donc réelles, $\mathcal{X}_A$ est scindé sur $\mathbb{R}$ et $\boxed{A \text{ est trigonalisable si } \phi_A \text{ est trigonalisable}}$

2. a) Par récurrence sur $k\in\mathbb{N}$: $A^0M=I_nM=M$ et $M(A+\lambda I_n)^0=MI_n=M$ donc $A^0M=M(A+\lambda I_n)^0$; si on suppose $A^kM=M(A+\lambda I_n)^k$ alors $A^{k+1}M=A(A^kM)\overset{\mathrm{HR}}{=}AM(A+\lambda I_n)^k$ et comme $\widetilde{\phi}_A(M)=\lambda M$, on a $AM=MA+\lambda M=M(A+\lambda I_n)$ et on conclut $A^{k+1}M=M(A+\lambda I_n)^{k+1}$

b) On pose $P=\sum_{k=0}^{d}a_kX^k$ et on a $P(A)M=\sum_{k=0}^{d}a_kA^kM=\sum_{k=0}^{d}a_kM(A+\lambda I_n)^k=MP(A+\lambda I_n)$. En choisissant $P=\mathcal{X}_A$, avec le théorème de Cayley-Hamilton, on a $\mathcal{X}_A(A)M=0$ donc $M\mathcal{X}_A(A+\lambda I_n)=0$ et comme $M\neq 0$, on en déduit $\boxed{\mathcal{X}_A(A+\lambda I_n)\notin\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})}$

c) On a $\det[\mathcal{X}_A(A+\lambda I_n)]=\prod_{i=1}^{n}\det(A+\lambda I_n-\alpha_iI_n)=\prod_{i=1}^{n}(-1)^n\mathcal{X}_A(\lambda-\alpha_i)$. Comme $\mathcal{X}_A(A+\lambda I_n)$ n'est pas inversible, il existe un indice $i\in[\![1,n]\!]$ tel que $\mathcal{X}_A(\lambda-\alpha_i)=0$, ie $\lambda-\alpha_i$ est une des valeurs propres de A et il existe $j\in[\![1,n]\!]$ tel que $\lambda-\alpha_i=\alpha_j$. Ainsi, on a $\boxed{\lambda=\alpha_i-\alpha_j}$

d) Si A est trigonalisable alors les α_i sont tous réels puis $\lambda=\alpha_i-\alpha_j$ est aussi réel ; toutes les valeurs propres de $\widetilde{\phi}_A$ sont réelles donc $\mathcal{X}_{\phi_A}$ est scindé sur $\mathbb{R}$. On en déduit $\boxed{\phi_A \text{ est trigonalisable si } A \text{ est trigonalisable}}$

Partie III

1. a) On a $D=\sum_{k=1}^{n}\lambda_kE_{k,k}$ donc $DE_{i,j}=\sum_{k=1}^{n}\lambda_kE_{k,k}E_{i,j}=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\delta_{k,i}E_{k,j}=\lambda_iE_{i,j}$ et de même, on a $E_{i,j}D=\lambda_jE_{i,j}$ donc $\boxed{DE_{i,j}-E_{i,j}D=(\lambda_i-\lambda_j)E_{i,j}}$

b) On a $A=PDP^{-1}$ donc $\phi_A(B_{i,j})=P\left(DE_{i,j}-E_{,j}D\right)P^{-1}=(\lambda_i-\lambda_j)B_{i,j}$; de plus P étant inversible et $E_{i,j}\neq 0$, on a $B_{i,j}\neq 0$, ie $\boxed{B_{i,j} \text{ est un vecteur propre de } \phi_A \text{ associé à } \lambda_i-\lambda_j}$

c) Les matrices $(B_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ forment une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: l'application $\psi : M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\mapsto PMP^{-1}$ est un isomorphisme donc transforme la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ en $(B_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ qui est aussi une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On en déduit qu'il existe une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de ϕ_A donc $\boxed{\phi_A \text{ est diagonalisable}}$

2. a) On a $AP_{i,j}-P_{i,j}A=\lambda_{i,j}P_{i,j}$ donc $AP_{i,j}X=(P_{i,j}A+\lambda_{i,j}P_{i,j})X=(\lambda+\lambda_{i,j})P_{i,j}X$: $\boxed{\mu_{i,j}=\lambda+\lambda_{i,j}}$

b) Si $Y\in\mathbb{R}^n$ alors il existe une matrice $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $Y=MX$ car $X\neq 0$ peut être complété en $(X,X_2,\ldots,X_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$ et il existe une (unique) matrice telle que $MX=Y$ et $MX_i=0$ pour $i\geqslant 2$ (par exemple). Puis $(P_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc on peut écrire $M=\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\alpha_{i,j}P_{i,j}$, ce qui donne $Y=\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\alpha_{i,j}P_{i,j}X$. La famille $(P_{i,j}X)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est génératrice de $\mathbb{R}^n$, on peut en extraire une base de $\mathbb{R}^n$, formée de vecteurs propres de A car les $P_{i,j}X$ sont des vecteurs propres de A. Ainsi, $\boxed{A \text{ est diagonalisable}}$

Partie IV

1. a) $(I_n,A,\ldots,A^m)$ est une famille de $m+1$ vecteurs de $\mathbb{R}[A]$, $\dim(\mathbb{R}[A])=m$, donc cette famille est liée ; il existe donc $\alpha_0,\ldots,\alpha_m\in\mathbb{R}$, non tous nuls, tels que $\sum_{i=0}^{m}\alpha_iA^i=0$; le polynôme $\boxed{P=\sum_{i=0}^{m}\alpha_iX^i \text{ est annulateur de } A}$

b) Si $B=Q(A)\in\mathbb{R}[A]$, par division euclidienne, il existe $Q_1,R\in\mathbb{R}[X]$ tels que $Q=PQ_1+R$ et $\deg(R)\leqslant d-1$; on a alors $B=Q(A)=P(A)Q_1(A)+R(A)=R(A)$. Comme $\deg(R)\leqslant d-1$, $R(A)\in\mathrm{Vect}\{I_n,A,\ldots,A^{d-1}\}$ puis $\mathbb{R}[A]\subset\mathrm{Vect}\{I_n,A,\ldots,A^{d-1}\}$. L'inclusion inverse étant évidente, on a $\boxed{\mathbb{R}[A]=\mathrm{Vect}\{I_n,A,\ldots,A^{d-1}\}}$

c) $m=\dim(\mathbb{R}[A])$ donc $m\leqslant d$ puis $m=d$ vu l'inégalité initiale vérifiée par d. La famille $(I_n,A,\ldots,A^{m-1})$ est donc génératrice de $\mathbb{R}[A]$, constituée de $m=\dim(\mathbb{R}[A])$ vecteurs donc $\boxed{\left(I_n,A,\ldots,A^{m-1}\right) \text{ est une base de } \mathbb{R}[A]}$

2. On a $\phi_A\left(A^k\right)=0$ pour tout $k\in\mathbb{N}$ donc $\boxed{\mathbb{R}[A]\subset\ker(\phi_A) \text{ et } \dim(\ker(\phi_A))\geqslant m}$

3. a) Si v commute avec u alors $E_{\lambda_k}(u)$ est stable par v. Réciproquement, si tous les espaces propres de u sont stables par v alors pour $x\in E_{\lambda_k}(u)$, on a $v(x)\in E_{\lambda_k}(u)$ donc $u\circ v(x)=\lambda_kv(x)=v(\lambda_kx)=v\circ u(x)$ donc $u\circ v$ et $v\circ u$ coïncident sur chaque $E_{\lambda_k}(u)$ donc sur $\bigoplus_{k=1}^{p}E_{\lambda_k}(u)=E$.

On en déduit $\boxed{u \text{ et } v \text{ commutent si et seulement si les } E_{\lambda_k}(u) \text{ sont stables par } v}$

b) On en déduit $B\in\ker(\phi_A)$ si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$ est diagonale par blocs si $\mathcal{B}$ est adaptée à $E=\bigoplus_{k=1}^{p}E_{\lambda_k}(u)$.

c) On vient de prouver que, si $\mathcal{B}$ est une base adaptée à la décomposition $E = \bigoplus_{k=1}^{p} E_{\lambda_k}(u)$, l'application $(B_1, \ldots, B_p) \mapsto \text{diag}(B_1, \ldots, B_p)$ est un isomorphisme de $\prod_{k=1}^{p} \mathcal{M}_{m_k}(\mathbb{R})$ sur l'ensemble $\{\text{Mat}_{\mathcal{B}}(v), v \in \ker(\phi_A)\}$.

On en déduit $\dim(\ker(\phi_A)) = \dim\left(\prod_{k=1}^{p} \mathcal{M}_{m_k}(\mathbb{R})\right) = \sum_{k=1}^{p} \dim(\mathcal{M}_{m_k}(\mathbb{R}))$ puis $\boxed{\dim(\ker(\phi_A)) = \sum_{k=1}^{p} m_k^2}$

d) On a toujours $1 \leqslant p \leqslant n$ et $n = \sum_{k=1}^{p} m_k$ car u est diagonalisable. On calcule alors $\dim(\ker(\phi_A))$ en fonctions des valeurs de p (l'ordre des valeurs propres n'a pas d'influence sur la valeur de $\dim(\ker(\phi_A))$) :

p (nb de vp)	mult resp (m_k)	$\dim(\ker(\phi_A))$
1	5	25
2	1,4	17
	2,3	13
3	1,1,3	11
	1,2,2	9
4	1,1,1,2	7
5	1,1,1,1,1	5

Problème : (d'après CCP PSI 2008 maths 1)

Partie I

1. On a $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^x} = \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ +\infty & \text{si } x < 0 \end{cases}}$

2. Si $x \leqslant 0$ alors $\left(\frac{1}{n^x}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne tend pas vers 0 donc $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ diverge. Si $x > 0$, la suite $\left(\frac{1}{n^x}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 0 en décroissant donc, d'après le CSSA, la série $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ converge et $\boxed{\mathcal{D}_\theta = \mathbb{R}^{+*}}$

3. On pose $\theta_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ et on vérifie les hypothèses du théorème de continuité des séries de fonctions :

H1 : Pour tout $n \geqslant 1$, la fonction θ_n est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ car $\theta_n(x) = (-1)e^{-x\ln n}$

H2 : Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}^{+*}$; la série $\sum \theta_n(x)$ vérifie le CSSA donc si $x \in [a, b]$, on a $|R_n(x)| \leqslant \frac{1}{(n+1)^x} \leqslant \frac{1}{(n+1)^a}$ (indépendant de x). Ainsi $\|R_n\|_{\infty,[a,b]} \leqslant \frac{1}{(n+1)^a} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\sum \theta_n$ CVUTS de $\mathbb{R}^{+*}$.

On en déduit $\boxed{\text{la continuité de } \theta \text{ sur } \mathbb{R}^{+*}}$

4. $\theta(x) = 1 + R_1(x)$ avec $R_1(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ donc $R_1(x) \leqslant 0$ et $|R_1(x)| \leqslant \frac{1}{2^x}$ d'après le CSSA, ce qui donne $\boxed{1 - \frac{1}{2^x} \leqslant \theta(x) \leqslant 1}$ Ainsi, $\theta(x) \in [0, 1]$ donc θ est bornée et $\lim_{x\to+\infty} 2^{-x} = 0$ donc, par encadrement, $\boxed{\lim_{+\infty} \theta = 1}$

Partie II

1. Si $x > 0$ alors $u_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-nx}$ (positif) et $\sum e^{-nx}$ converge car $|e^{-1}| < 1$ donc $\boxed{f \text{ est définie sur } \mathbb{R}^{+*}}$

2. On applique le théorème de continuité :

H1 : pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonctions u_n sont continues sur $\mathbb{R}^{+*}$

H2 : Si $[a, b] \subset \mathbb{R}^{+*}$, alors $\|u_n\|_{\infty,[a,b]} = u_n(a)$ car u_n est décroissante et positive sur $\mathbb{R}^{+*}$. $\sum u_n(a)$ converge donc $\sum u_n$ converge normalement sur tout segment de $\mathbb{R}^{+*}$

On en déduit que $\boxed{f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^{+*})}$

3. Si $0 < x < y$ alors $f(x) - f(y) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) - f_n(y) < 0$ car les fonctions f_n sont strictement décroissantes sur $\mathbb{R}^{+*}$ pour $n \geqslant 1$; $\boxed{f \text{ est donc strictement décroissante sur } \mathbb{R}^{+*}}$

4. E est l'image de l'intervalle $\mathbb{R}^{+*}$ par une fonction continue donc $\boxed{E \text{ est un intervalle}}$ (d'après le TVI).

5. On applique le théorème de double limite en $+\infty$:

H1 : $\lim_{x\to+\infty} u_n(x) = 0$ pour $n \geqslant 1$ et $u_0(x) = \ln 2 \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ln 2$

H2 : on a $\|u_n\|_{\infty,[1,+\infty[} = u_n(1)$ et $\sum u_n(1)$ converge donc $\sum u_n$ converge normalement sur $[1,+\infty[$.

On en déduit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \lim\limits_{x\to+\infty} u_n(x)$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ln 2}$

6. a) φ est continue sur $]0,1]$ et $\lim\limits_{y\to0} \varphi(y) = 1$ $\boxed{\varphi \text{ est intégrable sur }]0,1]}$

Par IPP : les fonctions $u : y \mapsto \ln(1+y)$ et $v : y \mapsto \ln(y)$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1]$ et $u(y)v(y) \underset{y\to0}{\sim} y\ln(y) \xrightarrow[y\to0]{} 0$ donc

$\displaystyle\int_0^1 \varphi(y)\,\mathrm{d}y = \Big[u(y)v(y)\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{\ln y}{1+y}\,\mathrm{d}y$ puis $\boxed{\displaystyle\int_0^1 \varphi(y)\,\mathrm{d}y = -\int_0^1 \frac{\ln y}{1+y}\,\mathrm{d}y}$

b) $\varphi_k \in \mathcal{C}^0(]0,1])$ et $\varphi_k(y) \underset{y\to0}{=} o\left(\dfrac{1}{\sqrt{y}}\right)$, car $k+\dfrac{1}{2} > 0$, donc $\boxed{\varphi_k \text{ est intégrable sur }]0,1]}$

Par IPP : les fonctions $u : y \mapsto \ln(y)$ et $v : y \mapsto \dfrac{y^{k+1}}{k+1}$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1]$ et $\lim\limits_{y\to0} u(y)v(y) = 0$ (car $k+1>0$)

donc $\displaystyle\int_0^1 \varphi_k(y)\,\mathrm{d}y = \Big[u(y)v(y)\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{y^{k+1}}{k+1}\times\frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \boxed{\frac{-1}{(k+1)^2}}$

c) Si $y \in]0,1[$, on a $\dfrac{\ln y}{1+y} = \ln(y)\sum\limits_{k=0}^{+\infty}(-y)^k = \sum\limits_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\varphi_k(y)$. On intervertit alors la somme infinie et l'intégrale (par TITT vu que $]0,1[$ n'est pas un segment) :

H1 : $\sum(-1)^k\varphi_k$ converge simplement sur $]0,1[$ vers $S : y \mapsto \dfrac{\ln y}{1+y}$.

H2 : les fonctions φ_k et la fonction S sont continues sur $]0,1[$.

H3 : les fonctions $(-1)^k\varphi_k$ sont intégrables sur $]0,1]$ (car $(-1)^k$ est une constante).

H4 : $\displaystyle\int_0^1 |(-1)^k\varphi_k(y)|\,\mathrm{d}y = -\int_0^1 \varphi_k(y)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{(k+1)^2}$ donc $\displaystyle\sum\int_0^1 |(-1)^k\varphi_k(y)|\,\mathrm{d}y$ converge.

On en déduit $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln y}{1+y}\,\mathrm{d}y = \int_0^1 S(y)\,\mathrm{d}y = \sum_{k=0}^{+\infty}\int_0^1 (-1)^k\varphi_k(y)\,\mathrm{d}y = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{1}{(k+1)^2}$ donc, après changement d'indice et avec **II.6.a** $\boxed{\displaystyle\int_0^1 \varphi(y)\,\mathrm{d}y = \theta(2)}$

d) ψ_x est continue sur $[0,+\infty[$ et, comme $x>0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-xt} = 0$ donc $\psi_x(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} e^{xt}$. Comme $x>0$, $t \mapsto e^{-xt}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ donc $\boxed{\psi_x \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}^+}$

On pose alors $y = e^{-xt} \Leftrightarrow t = -\dfrac{\ln y}{x}$: la fonction $y \mapsto -\dfrac{\ln y}{x}$ est $\mathcal{C}^1$ bijective et strictement décroissante de $]0,1]$ sur $\mathbb{R}^+$, $\mathrm{d}t = -\dfrac{\mathrm{d}y}{xy}$. On en déduit $\displaystyle\int_0^{+\infty} \psi_x(t)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{x}\int_1^0 \ln(1+y)\frac{dy}{y} = \boxed{\frac{1}{x}\theta(2)}$

7. La fonction $t \mapsto \psi_x(t)$ est décroissante et continue sur $\mathbb{R}^+$ donc, pour $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1}(x) \leqslant \displaystyle\int_n^{n+1} \psi_x(t)\,\mathrm{d}t \leqslant u_n(x)$ donc, en sommant ces inégalités pour $n \geqslant 0$, on a $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \psi_x(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ ce qui donne, avec la question précédente $\dfrac{\theta(2)}{x} \leqslant f(x) \leqslant \ln 2 + \dfrac{\theta(2)}{x}$, pour tout $x>0$. On en déduit, par encadrement $\boxed{\lim\limits_{x\to0} xf(x) = \theta(2)}$

Comme $\theta(2) > 0$ (d'après **I.4**), on a $f(x) \underset{x\to0}{\sim} \dfrac{\theta(2)}{x} \xrightarrow[x\to0]{} +\infty$ donc $\boxed{E =]0,+\infty[}$ (l'intervalle reste ouvert car f est strictement croissante donc n'atteint pas sa limite en $+\infty$)

8. a) Par concavité de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ sur $[0,1]$, on a $\ln(1+x) \leqslant x$ puis on étudie $h : x \mapsto \dfrac{x^2}{2} - x + \ln(1+x)$ qui est $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et $h'(x) = \dfrac{x^2}{1+x} \geqslant 0$ et, comme $h(0)=0$, on a $h \geqslant 0$ sur $[0,1]$.

b) On a $f(x) - \ln(2) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$. De plus $0 \leqslant e^{-nx} - u_n(x) \leqslant \dfrac{1}{2}e^{-2nx}$ si $x>0$ car $e^{-nx} \in [0,1]$. En sommant ces inégalités pour $n \geqslant 1$ (toutes les séries qui apparaissent convergent pour $x>0$), on obtient l'encadrement $0 \leqslant \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nx} - (f(x)-\ln 2) \leqslant \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-2nx}$, ie $0 \leqslant \dfrac{e^{-x}}{1-e^{-x}} - (f(x)-\ln 2) \leqslant \dfrac{e^{-2x}}{2(1-e^{-2x})}$. On déduit de cet encadrement $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x(f(x)-\ln 2) = 1$ donc $\boxed{f(x) - \ln 2 \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{-x}}$